



ڈاکٹر ذاکر حسین لائبریری

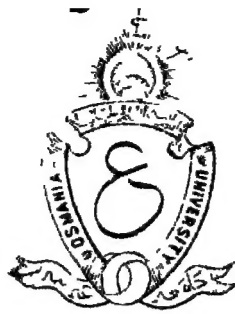
DR. ZAKIR HUSAIN LIBRARY

JAMIA MILLIA ISLAMIA
JAMIA NAGAR

NEW DELHI

Please examine the book before
taking it out. You will be res-
ponsible for damages to the book
discovered while returning it.

A. H. Farooq



نصاب فی یاضی

نصاب فی یاضی

حفظہ دوم

برائے طبیعیات بی۔ ایس سی

تالیف

مولوی محمد عبد الرحمن خان صاحب بی۔ ایس سی آنرز (لندن)

اسٹوڈنٹ آف دی رائل کالج آف سائنس (لندن)، فیلو آف دی رائل سوسائٹی، فیلو آف دی فزیکل سوسائٹی لندن

سابق صدر کلیئہ جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۶۲ھ ۱۳۵۲ھ ۱۹۴۳ء

طبع و نشر

(۱۷، ۲۱۰)

تہیہ

منجانب مؤلف کتاب

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی وغیرہ حصہ دوم کی تالیف میں وہی اصول پیش نظر رکھے گئے ہیں جو حصہ اول کی تالیف کے وقت تھے۔ حتی الامکان جدید و مستند ترین طریقے استعمال کیے گئے اور تبدیلیوں کی تمام مشکلات کو آسان کرنے کی کوشش کی گئی۔ نصاب کے حدود کے اندر ابتدائی امور سے آغاز کر کے کافی بلند پایہ نتائج تک بحث کی گئی ہے۔ ہر مسئلہ سے متعلق متعدد توضیحی مثالیں حل کر کے بتائی گئی ہیں۔ جا بجا ہندسی شکلیں صحت و وضاحت کے ساتھ کھینچی گئی ہیں تاکہ طالب علم کو ان کے سمجھنے میں دقت نہ ہو۔ مشق کے لیے جو سوالات دیے گئے ہیں نسبتاً سلیس ہیں اور مختلف شعبہ جات کے لیے کارآمد ہو سکتے ہیں۔

افسوس ہے کہ نصاب کی مجبوریوں کی وجہ سے تجربات کے ہندسہ و تحلیلی میں احصاء کا خاطر خواہ اطلاق نہیں بتایا جاسکا۔ اور نہ تفریق مساواتوں کے اقسام اور ان کے حل کے طریقوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ لکھا جاسکا۔ بریں ہم قوی امید ہے کہ اس نصاب پر اچھی طرح حاوی ہو جانے کے بعد طبیعیات انجینیری اور کیمیا کے طالب علم اعلیٰ ریاضی کے اکثر و بیشتر مسائل باسانی سمجھ سکیں گے اور مزید

کوشش سے بطور خود نظری طبیعیات پر عبور حاصل کر سکیں گے۔
اس نصاب کی تیاری میں زیادہ تر مندرجہ ذیل کتابوں سے استفادہ
کیا گیا:۔

- (1) Elements of the Differential and Integral Calculus by W.A. Granville, P.F. Smith and W.R. Longley.
- (2) The Calculus by Hans Dalakar and H.E. Hartig.
- (3) D. Humphrey's Advanced Mathematics.
- (4) F.S. Wood and F.H. Bailey's A course in Mathematics (2 Volumes).
- (5) F.G.W. Brown's Higher Mathematics.
- (6) Benjamin Williamson's Elementary Treatise on the Differential Calculus.
- (7) W.E. Byerley's Elements of the Integral Calculus.

محمد عبدالرحمن خاں

فہرستِ مباحث

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی وغیرہ
حصہ دوم (احصاء)

نمبر	مضمون	نمبر
۱	پہلا باب مبادیات	۱
۷	دوسرا باب انتہائیں اور تسلسل	۲
۱۷	تیسرا باب تفنُّق	۳
۳۳	چوتھا باب قوتِ نمائی، نوکارتی اور مثلثی تفاعلوں کا تفرق	۴
۵۸	پانچواں باب متواتر تفرق	۵
۷۲	چھٹا باب تفرقی سر (یا شق) کے استعمال سے متعلق چند ہندسی و دیگر مثالیں	۶
۱۱۸	ساتواں باب تبدیلی اور قطبی مساواتیں - علم ہندسی میں ان کا استعمال	۷
۱۳۸	اٹھواں باب صغاریے اور تفرقے	۸
۱۵۴	نواں باب انحناء نصف قطر انحناء اور دائرہ انحناء	۹
۱۷۰	دسواں باب اوسط قیمت کا مسئلہ اور اس کے اطلاقات	۱۰
۱۸۹	گیارہواں باب معیاری ابتدائی صورتوں کے مکمل کے قواعد	۱۱
۲۲۸	بارہواں باب مکمل کا مستقل اور محدود مکمل	۱۲
۲۵۶	تیرہواں باب مکملہ کا تصور بطور انتہائے مجموعہ - (گردشی مجسموں کے حجم، مخنیوں کی تخطیط، گردشی سطحوں کے رقبے وغیرہ)	۱۳

صفحہ نمبر	مضمون	صفحہ نمبر
۲۹۰	چودھواں باب مختلف ترکیبوں سے باضابطہ مکمل	۱۳
۳۱۰	پندرہواں باب تحویلی ضابطے	۱۵
۳۲۴	سولہواں باب مکمل احصاء کے ذریعہ طبیعیات کے بعض مسائل کا حل	۱۶
۳۴۷	سترہواں باب ناقصا ہی سلسلے	۱۷
۳۷۶	اٹھارہواں باب تفاعلوں کا پھیلاؤ۔ میکلاڈن اور ٹیلر کے سلسلے	۱۸
۳۸۶	انیسواں باب زائدی تفاعلوں کا تفرق اور مکمل	۱۹
۳۹۳	بیسواں باب جزوی تفرق	۲۰
۴۱۵	اکیسواں باب ضعیفی مکملے۔ دہرے اور تہرے مکملوں پر ابتدائی بحث	۲۱
۴۵۲	بائیسواں باب معمولی تفرقی مساواتیں	۲۲

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

نصاب ذیلی ریاضی

جہانمے
طبیعیات بی۔ اے وغیرہ
حصہ اول

احصاء پہلا باب مبادیات

احصاء ریاضی کے اُس زبردست شعبہ کا نام ہے جس میں مقادیر کے تغیرات اور اُن کے باہمی تعلقات معلوم کیے جاتے ہیں۔ اس کے دو بڑے حصے ہیں: ایک حصہ تفریقی احصاء کہلاتا ہے اور دوسرا تکمیلی احصاء۔ تفریقی احصاء میں مقادیر کے تغیر کی شرحوں اور ان کے خواص سے بحث کی جاتی ہے۔ تکمیلی احصاء اس کی ضد ہے اور اس میں شرح تغیر کی مدد سے خود تغیر مقدار کی تعیین کی جاتی ہے۔

یہ عجیب اتفاق ہے کہ احصاء کے سب سے پہلے بانی یعنی ارشمیدس (Archimedes) نے پہلے تکمیلی احصاء کے مسائل حل کرنے کے طریقے دریافت کیے مثلاً منحنی خطوں سے محصور رقبوں کی تعیین وغیرہ اور اس کے بعد اپنے ایجاد کردہ لولبی کے خط حاس کی تلاش میں تفریقی احصاء کے اصول متخال کیے۔ گویا نیوٹن (Newton) اور لائبنٹس (Leibniz) سے

جو بلاشبہ احصاء کے موجد سمجھے جاتے ہیں تقریباً دو ہزار برس پہلے (ارشمیدس نے احصاء کے طریقے استعمال کر کے ریاضی کے بعض اہم اور کارآمد مسائل حل کیے [واضح ہو کہ ارشمیدس، افلاطون کی وفات کے ساڑھے سال بعد ساٹراکیوں (Syracuse) صقلیہ میں پیدا ہوا]۔ ارشمیدس کے بعد کیپلر (Kepler) نے ۱۶۱۵ء میں شراب کے پیئوں، وغیرہ کا حجم ناپنے سے متعلق ایک کتاب لکھی جس میں کلی احصاء کے طریقے کام میں لائے گئے۔ سترہویں صدی کے ریاضی دان جیسے کوالیئرڈی (Cavalieri)، فیرما (fermat)، وائس (Wallis) بیلرو (Barrow) وغیرہ جس قسم کی تحقیقات میں مصروف تھے اس کا یہ لازمی نتیجہ تھا کہ نیوٹن اور لاٹنٹیس کے ہاتھوں احصاء کی باضابطہ تنظیم عمل میں آئی۔

قبل اس کے کہ ہم احصاء کے اصول اور طریقہ عمل پر بحث کریں بعض اصطلاحوں اور ان کے صحیح مفہوم سے واقفیت ضروری ہے۔ ریاضی کے مختلف شعبوں سے طالب علم کو اب تک جو اصطلاحیں معلوم ہوئی ہیں ان میں تفاعل، تابع متغیر، متغیر متبوع اور منتقل بہت ضروری ہیں۔ جب کبھی دو مقداروں میں اس قسم کا تعلق ہوتا ہے کہ ان میں سے ایک کے اندر کوئی بھی تغیر واقع ہوتا ہے تو دوسری مقدار میں بھی اس کے متناظر ایک تغیر پیدا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں موخر الذکر مقدار کو پہلی مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔ اس کتاب میں جو تفاعل استعمال ہونگے ان کو دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں:۔ جبری اور ماورائی۔

جبری تفاعل محدود درجوں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ یہ قسمیں جمع، تفریق، ضرب، تقسیم اور جذر کے اعمال سے مربوط ہوتی ہیں۔

جو تفاعل جبری نہ ہوں ماورائی کہلاتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف جبریہ اور ابتدائی ماورائی تفاعلوں پر بحث کی جائیگی۔

جبریہ تفاعلوں کی مثالیں:۔

$$(۱) \quad ۲\lambda^۲ + \frac{۳}{\lambda} - \lambda^۲ - \lambda - ۲ + \lambda \quad \text{لاکھیر رقی تفاعل ہے۔}$$

$$(۲) \quad \lambda^۲ + \lambda^۲ + ۲\lambda + ج \quad \text{لاکھیر منطقی تفاعل ہے۔}$$

منطق کسر ہے -

$$(۳) \quad \frac{۵ - ۱۳ + ۳}{۱ + ۳ - ۲}$$

ماورائی تفاعلوں کی مثالیں :-

(۱) جب لا علم مثلث سے متعلق تفاعل

(۲) جم لا مقلوب مثلثی تفاعل

(۳) کوک لا ، کوک لا لوکار تہی تفاعل

(۴) قوت نائی تفاعل

تفاعلی ترقیم - جب کسی جماعت یا نوع کے (نہ کہ کسی خاص) تفاعل سے بحث کرنی مقصود ہو تو اس جماعت یا نوع کے تفاعل کو ف (لا) کے ذریعہ تعبیر کرتے ہیں۔ پڑھتے وقت اس کو ”لا کا ف - تفاعل“ یا مختصراً ”لا کا ف“ کہتے ہیں۔ اسی طرح فا (لا) اور فہ (لا) وغیرہ بھی اس مقصد کے لیے عام طور پر مروج ہیں۔

اس قسم کی عام تفاعلی ترقیم سہولت کی خاطر بطور اختصار کسی ایک خاص تفاعل کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔ مثلاً

ف (لا) سے $۲ لا^۳ + لا^۲ + ۵$ - مراد لی جاسکتی ہے - اور ایسی صورت میں لا کے مصرحہ بالا کثیر رقی جملہ کو اس کا ”ف - تفاعل“ قرار دیتے ہیں۔ اس طرح فا (لا) سے جب لا مراد لی جاسکتی ہے اور لا کی جیب کو اس کا فا - تفاعل قرار دیا جاتا ہے۔ اس ترقیم کے بموجب اگر ف (لا) لکھا جائے تو یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ اس سے مراد

$$۲ لا^۳ + لا^۲ + ۵ - ۱۳$$

اے اگر ف (۳) لکھا جائے تو اس سے مراد

$$۲ (۳)^۳ + (۳)^۲ + ۵ - ۳ \times ۳$$

اسی طرح ف (۱- لا) سے مراد $۲ (۱- لا)^۲ + (۱- لا) + ۵ - ۱۳$ ہے۔

اور $(\lambda + 2)$ سے مراد جب $(\lambda + 2)$ ہے وغیرہ -

متبوع متغیر اور تابع متغیر کا مفہوم - اگر کسی مساوات میں

صرف دو ہی متغیر ہوں تو ان میں سے ایک متغیر کو خاص خاص قیمتیں دی جاسکتی ہیں اور ان کے لحاظ سے دوسرے متغیر کی متناظر قیمتیں دریا منت ہو جاتی ہیں - جس متغیر کو اس طرح خاص خاص قیمتیں دی جاتی ہیں متبوع متغیر کہلاتا ہے اور دوسرا متغیر تابع متغیر یا تفاعل کہلاتا ہے -

وقفہ - سہولت کی خاطر بلکہ بعض اوقات بالالزام متبوع متغیر کی وسعت محدود کر دی جاتی ہے - مثلاً فرض کرو

$$\sqrt{\lambda - 1} = \lambda$$

خیالی مقادیر سے بچنے کے لیے λ کو $\lambda + 1$ سے زیادہ یا $\lambda - 1$ سے کم قیمتیں نہیں دی جانی چاہئیں - اس تحدید کو یہ کہہ کر ظاہر کیا جاتا ہے کہ λ وقفہ $(\lambda - 1, \lambda + 1)$ کے وقفہ اور اس کے مشمولہ نقطوں کے اندر واقع ہے - تحریر کے ذریعہ یہ مفہوم اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے

$$\lambda \geq \lambda - 1 \text{ اور } \lambda \leq \lambda + 1$$

عام طور پر اگر λ کی سعت λ اور λ ب عددوں کے مابین ہے تو کہا جاتا ہے کہ λ وقفہ $(\lambda - 1, \lambda + 1)$ کے اندر واقع ہے - اور لکھا جاتا ہے $\lambda \geq \lambda - 1$ اور $\lambda \leq \lambda + 1$ اگر کوئی ایک یا دونوں سرے پر کے نقطوں کو وقفہ سے خارج کرنا مقصود ہو تو حسب ضرورت مساوات کی ایک یا دونوں علامتیں متروک کر دی جاتی ہیں - جب یہ بتانا مقصود ہوتا ہے کہ λ کوئی سی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے تو لکھا جاتا ہے

$$-\infty < \lambda < \infty$$

تفاعل محدود یا معروف - اگر λ کی کوئی قیمت ہوتی ہے جبکہ $\lambda = \lambda$ تو کہا جاتا ہے کہ یہ تفاعل $\lambda = \lambda$ پر محدود یا معروف ہے

وحید القیمت اور کثیر القیمت تفاعلوں کا مفہوم۔ اگر کسی وقفہ کے اندر متبوع متغیر کی ہر قیمت کے لیے کسی تفاعل کی صرف ایک ہی متناظر قیمت ہوتی ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ تفاعل وقفہ مذکور کے اندر وحید القیمت ہے۔ اور اگر تفاعل متبوع متغیر کی ہر قیمت کے لیے ایک سے زیادہ متناظر قیمتیں رکھتا ہے تو اس کو کثیر القیمت کہتے ہیں۔

مثالیں

(۱) اگر $f = 2x^3 + \frac{1}{x} + 3y - 4z + 5$ تو بتاؤ کہ $f(2) = 20$
اور $f(2, 1, 1, 1) = 3$

(۲) اگر $f(1) = 5$ = مس لا تو $f(1, 1) = 1$ $f(1, 1) + f(1, 1) = 2$
 $1 - f(1, 1) = f(1, 1)$

(۳) اگر $f(1) = 5$ = جب لا تو $f(1, 1) = 3$ $f(1, 1) - \{f(1, 1)\} = 2$
(۴) اگر $f(1) = 5$ = $f(1, 1) - f(1, 1) = 2$ $f(1, 1) - f(1, 1) = 2$

$f(1) = 5$

(۵) اگر $f(1) = 5$ = $f(1, 1) + f(1, 1) = 2$ $f(1, 1) = 2$

اور $f(1) = 2$

(۶) اگر $f(1) = 5$ = لوک $f(1, 1) = 3$ $f(1, 1) = 3$

$f(1) = 3$

(۷) اگر $f(1) = 5$ = $f(1, 1) = 3$ $f(1, 1) = 3$

(۸) اگر $f(1) = 5$ = مس لا جس میں $f(1, 1) = 3$ $f(1, 1) = 3$

(۹) مندرجہ ذیل مساواتوں میں خیالی مقادیر سے بچنے کے لیے لا کو کن
وتفوں تک محدود کرنا چاہیے؟

$$(ا) \sqrt{k^2 - l^2} = m$$

$$(ب) \sqrt{(l-m)(l+n)} = m > 0, n > m$$



دوسرا باب

انتہائیں اور تسلسل

متغیر کی انتہا۔ اگر لا اس طرح تغیر قبول کرتا ہے کہ لا۔ و جس میں و ایک مستقل ہے، بالآخر کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو عدد آگست ہو جائے اور کمتر رہے تو لا کی نسبت کہا جاتا ہے کہ وہ و تک بطور ایک انتہا کے پہنچتا ہے۔

تفاعل کی انتہا۔ در انحالیکہ لا بطور انتہا کے و تک پہنچتا ہے، اگر ف (لا)۔ ل کی مددی قیمت، جس میں ل ایک مستقل ہے، بالآخر کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو کمتر ہو جائے اور کمتر رہے تو کہا جاتا ہے کہ ف (لا) بطور انتہا کے ل تک پہنچتا ہے۔ اس امر کو ظاہر کرنے کے لیے کہ لا جیسے جیسے و تک بطور انتہا کے پہنچتا ہے ف (لا) کی انتہا ل ہے، حسب ذیل طریقہ ترقیم اختیار کیا جائیگا:

نسب ف (لا) = ل

متغیر متبوع جیسے جیسے ایک انتہا تک پہنچتا ہے اس کے تفاعل مختلف

ہمیتوں میں ٹوٹنا ہوتے ہیں۔ یہاں مندرجہ ذیل اقسام کے تفاعلون ہی کی انتہا کی تعریف سے متعلق بحث کی جائیگی:-

قسم (۱) جبکہ $\lambda = 1$ کے لیے $f(\lambda)$ محدود یا معرف ہے

$$\text{اور نہی } f(\lambda) = f(1)$$

مثال $f(\lambda) = \lambda^2$ ، $f(1) = 1$ اور نہی $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ، $f(1) = 1$

قسم (۲) جبکہ $\lambda = 1$ کے لیے $f(\lambda)$ محدود یا معرف نہیں ہے

لیکن بریں ہم نہی $f(\lambda)$ موجود ہے۔

مثال $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ، $f(1) = 1$ محدود نہیں ہے

لیکن نہی $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ، $f(1) = 1$

قسم (۳) جبکہ $\lambda = 1$ کے لیے $f(\lambda)$ محدود نہیں ہے

اور نہی $f(\lambda)$ معدوم ہے۔

مثال $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ، $f(1) = 1$ محدود نہیں ہے

اور نہی $f(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ، $f(1) = 1$ معدوم ہے۔

نہایتوں سے متعلق مسائل - ذیل کے مطالعہ میں نہایتوں سے متعلق پہنچ سکے خاص طور پر کارآمد ہیں۔ وہ یہاں بلا ثبوت بیان کر دیے جاتے ہیں۔

مسئلہ (۱) - متغیروں کی محدود تعداد کے جبری مجموعہ کی انتہا ان کی انتہاؤں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے:

نہی $(a \pm b \pm \dots \pm n) = (a \pm b \pm \dots \pm n)$

مسئلہ (۲) متغیروں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا ان کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے:

$$ہنا (۱) \times ہنا (۲) \times \dots \times ہنا (ن) = ہنا (۱ \times ۲ \times \dots \times ن)$$

مسئلہ (۳) دو متغیروں کے حاصل قیمت کی انتہا ان کی انتہاؤں کے حاصل تقسیم کے مساوی ہے:

$$ہنا \frac{ہنا (۱)}{ہنا (۲)} = \frac{ہنا (۱)}{ہنا (۲)}$$

مسئلہ (۴) اگر ایک متغیر مسلسل بڑھتا جاتا ہے لیکن ایک مستقل م سے نہیں بڑھتا، تو وہ ایک انتہا تک پہنچتا ہے جو م سے کمتر یا م کے مساوی ہے۔

مسئلہ (۵) اگر ایک متغیر مسلسل گھٹتا جاتا ہے لیکن ایک مستقل م سے کبھی کمتر نہیں ہوتا، تو وہ ایک انتہا تک پہنچتا ہے جو م سے بڑا یا م کے مساوی ہے۔

لامتناہی کا تخیل۔ ایک متغیر جو کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی بڑا ہو زائد ہو جاتا ہے تو اس کے متعلق کہا جاتا ہے کہ وہ بغیر کسی حد یا انتہا کے بڑا ہوتا ہے یا لامتناہی ہو جاتا ہے۔ یہ امر فیہ یغیہ علامت اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے:

و ← ∞

ایک متغیر جو کسی بھی منفی عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو کمتر ہو جاتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ بغیر حد یا انتہا کے گھٹتا ہے یا منفی طور پر لامتناہی ہوتا ہے۔ بذریعہ علامت اس کو یوں ظاہر کرتے ہیں:

و ← - ∞

یہ یاد رہے کہ علامت ∞ کسی عدد کو تعبیر نہیں کرتی ہے۔ پس ایسی تحریر

جیسے $5 \div \infty$ سے احتراز کرنا چاہیے۔ مہذا اگر $\infty \leftarrow$ تو ایسی صورت میں ∞ کو وکی انتہا نہیں تصور کرنا چاہیے۔ اس لیے کہ انتہا ہمیشہ ایک معین یا محدود عدد ہے۔

مثال (۱) نہیا $\frac{3}{1} \leftarrow$ (۳ - ۵ + ۷) دریافت کرو۔

مسئلہ (۱) سے نہیا $\frac{3}{1} \leftarrow$ (۳ - ۵ + ۷) = نہیا $\frac{3}{1} \leftarrow$

$$+ \text{ نہیا } \frac{5}{1} \leftarrow - \text{ نہیا } \frac{7}{1} \leftarrow$$

$$6 = 3 - 5 + 7 =$$

مثال (۲) نہیا $\frac{(1+2)(2-3)}{(2+1)} \leftarrow$ دریافت کرو۔

سائل (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{نہیا } \frac{(1+2)(2-3)}{(2+1)} \leftarrow}{\text{نہیا } \frac{3}{1} \leftarrow} = \frac{(1+2)(2-3)}{(2+1)} \leftarrow$$

$$50 = \frac{25 \times 10}{5} =$$

مثال (۳) نہیا $\frac{2}{1} \leftarrow$ (۲ + ۳ + ۴) دریافت کرو۔

سائل (۲) اور (۳) سے نہیا $\frac{2}{1} \leftarrow$ (۲ + ۳ + ۴)

$$= (2 + \text{نہیا } \frac{3}{1} \leftarrow + \text{نہیا } \frac{4}{1} \leftarrow)$$

$$8 = 2 + (0 + 0 + 2) =$$

مثال (۴) نہیا $\frac{24-3}{3-1} \leftarrow$ دریافت کرو۔

$$\frac{(9 + 113 + 1^2)(3 - 1)}{(3 - 1)} = \frac{24 - 1^3}{3 - 1}$$

مسئلہ (۲) سے $\frac{(3 - 1)}{(3 - 1)} = \frac{24 - 1^3}{3 - 1}$ نہی

$$\frac{(9 + 113 + 1^2)}{3 - 1}$$

۱ = $\frac{3 - 1}{3 - 1}$ لا کی ہر قیمت کے لیے سوائے ۱ = ۳

جب ۱ = ۳ یہ کسر محدود نہیں ہے۔ لیکن اگر ۱ = ۳ اس طرح پر

کہ لا کی قیمت کبھی ۳ کے مساوی نہیں ہونے پاتی تو نہی $\frac{3 - 1}{3 - 1} = 1$

پس $\frac{24 - 1^3}{3 - 1} = \frac{(9 + 113 + 1^2) \times 1}{3 - 1}$ ۲۴ =

مثال (۵) نہی $\frac{2 - 1 + 1^2}{5 + 1^2}$ دریافت کرو۔

$$\frac{\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + 1}{\frac{5}{1} + 1} = \frac{2 - 1 + 1^2}{5 + 1^2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + 1}{\frac{5}{1} + 1} = \frac{2 - 1 + 1^2}{5 + 1^2}$$

تفاعل کا تسلسل — کسی تفاعل ف (۱) کی نسبت

کہا جاتا ہے کہ وہ نقطہ ۱ = ۱ پر مسلسل ہے اگر کسی بھی طرح سے

جیسے جیسے ۱ → ۱ توقف (۱) کی انتہا ف (۱) کے مساوی ہے۔

نہیں کسی نقطہ ۱ = ۱ پر مسلسل ہونے کے لیے لازمی ہے

کہ تفاعل اس نقطہ پر محدود یا معرّف ہو۔ اس تفاعل کی

انتہا موجود ہونی چاہیے جیسے جیسے کہ $\lambda \rightarrow 1$ اور یہ انتہا $\lambda = 1$ پر تفاعل کی قیمت کے مساوی ہونی چاہیے۔

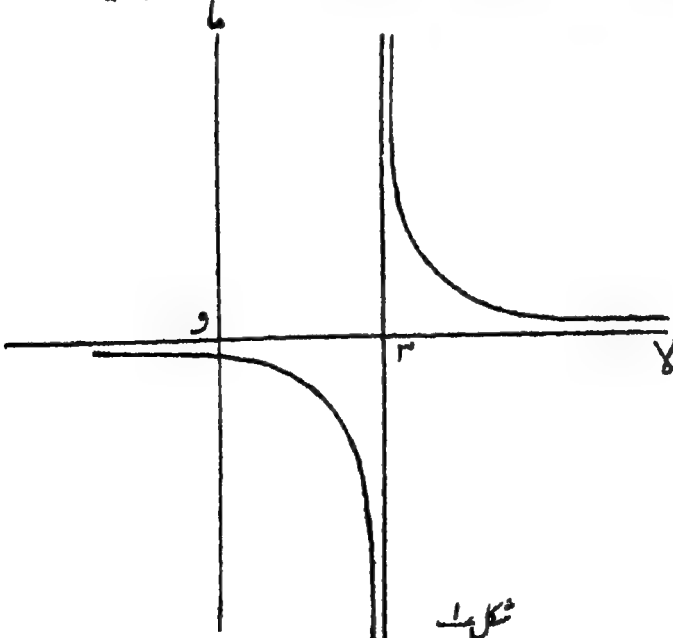
مگر کوئی تفاعل $\lambda = 1$ پر مسلسل نہ ہو تو کہا جاتا ہے کہ وہ $\lambda = 1$ پر غیر مسلسل ہے۔ اور اگر کسی وقفہ کے ہر نقطہ پر کوئی تفاعل مسلسل ہو تو کہا جاتا ہے کہ وہ وقفہ ملا کوثر کے اندر مسلسل ہے۔

اس مطالعہ میں جن تفاعلوں پر بحث کی جائیگی وہ ان کی تعریف کی پوری سمیت کے اندر مسلسل ہیں شاید یا استثنا متغیر مقبوع کی بعض انفرادی قیمتوں کے۔

کسی نقطہ پر غیر مسلسل تفاعلوں کی چند مثالیں۔

$$\text{مثال (۱)} \quad \lambda = \frac{1}{3 - \lambda}$$

یہ تفاعل $\lambda = 3$ پر محدود یا معرف نہیں ہے۔ اس لیے وہ λ کی



شکل ۱

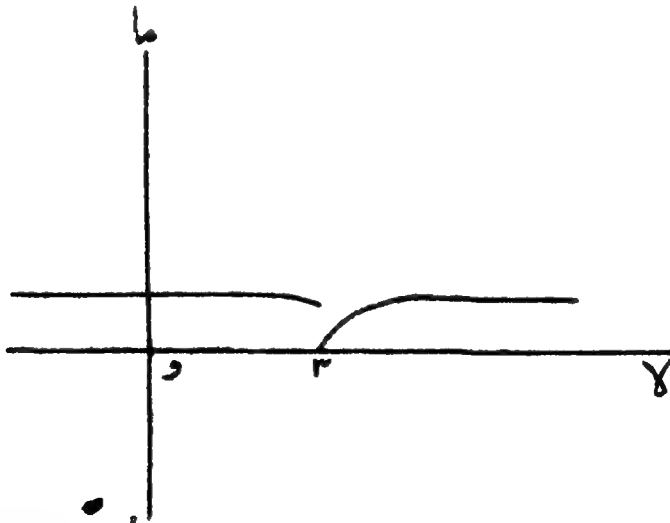
اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ اگر لا \leftarrow ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے کمتر رہے تو ما منفی لا متناہی ہو جاتا ہے۔ (دیکھو شکل ۱۔) اگر لا \leftarrow ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے زائد رہے تو ما مثبت لا متناہی ہو جاتا ہے۔ پس واضح ہے کہ تسلسل کے لیے جو شرائط عائد ہیں تفاعل مذکور ان کو نقطہ لا = ۳ پر پورا نہیں کرتا ہے۔

شکل سے واضح ہے کہ یہ غیر محدود عدم تسلسل کی مثال ہے۔

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{\frac{1}{3-0} ۳ + 1}{\frac{1}{3-0} ۳ + 1} = ۱$$

یہ تفاعل لا = ۳ پر محدود نہیں ہے اور اس لیے لا کی اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ (دیکھو شکل ۲۔)

اگر لا \leftarrow ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے کمتر رہتا ہے تو



شکل ۲

نہی لا = ۱۔ اور اگر لا \leftarrow ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے زائد رہتا ہے تو

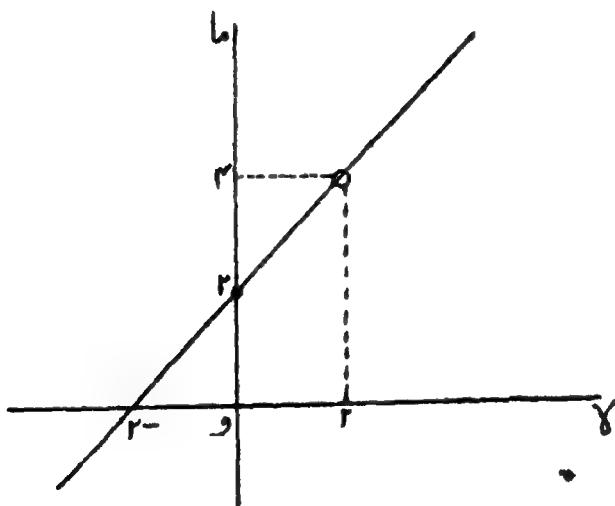
نہا ۱ = ۰۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ محدود علامت سلسل کی مثال ہے۔

مندرجہ بالا ہر دو تفاعل کی قیمت اچانک تبدیل ہو جاتی ہے جبکہ متغیر مقبوع کی مقدار میں (مصرعہ نقطوں پر) ذرا بھی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

$$\text{مثال (۳)} \quad \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda} = 1$$

یہ تفاعل $\lambda = 1$ پر محدود یا معرّف نہیں ہے۔ اس لیے وہ λ کی اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ جبکہ $\lambda = 1$ اسی بھی طریقہ پر بشرطیکہ $\lambda = 1$ تو λ کی انتہا ۲ ہے۔

شکل ۳ میں اس تفاعل کی جو ترسیم کی گئی ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ وہ خط مستقیم $\lambda = 1 + 1$ ہے۔ بائیں اشار خط کے اس نقطہ کے جو $\lambda = 1$ کے متناظر ہے۔



شکل ۳
(۱) اور (۲) مثالوں کے عدم تسلسل اور مثال (۳) کے عدم تسلسل میں

میں زق ہے۔ اس تیسری مثال میں تفاعل اپنا تک نہیں بدلتا جبکہ لا کی قیمت میں خفیف سی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ تفاعل کی مساوات جب اس کو محدود کرنے میں قاصر رہتی ہے تو اس قسم کے عدم تسلسل میں رفع کیے جاسکتے ہیں کہ تفاعل کو متعلقہ نقاط پر مناسب طریقہ پر محدود یا معترف کر دیا جائے۔ مثلاً مثال زیر بحث میں تفاعل کی قیمت ۲ مقرر کر دی جائے جبکہ لا = ۱۔ ایسی صورت میں لا = ۱ پر تسلسل کے تمام شرائط مکمل ہو جاتے ہیں۔

مثالیں

(۱) مندرجہ ذیل تفاعلوں کی اگر کوئی انتہا موجود ہو تو اس کی تعین کرو۔

(ا) نہا $\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^2$ جواب۔ انتہا = $\frac{12}{25}$

(ب) نہا $\frac{25 - 2\lambda}{5 - \lambda}$ جواب۔ انتہا = ۱۰

(ج) نہا $\frac{\lambda^2 + 2\lambda}{\lambda^2 + 2}$ جواب۔ کوئی انتہا نہیں

(د) نہا $\frac{\lambda^2 - 2\lambda}{\lambda^2 + 2}$ جواب۔ انتہا = $-\frac{1}{2}$

(ه) نہا $\frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda}$ جواب۔ انتہا = ۳

(و) نہا $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 2}$ جواب۔ کوئی انتہا نہیں

(ز) نہا $\frac{\sqrt{2 - \lambda} + 1 + \lambda}{1 - \lambda}$ جواب۔ انتہا = ۱

(ح) $\frac{1 + 2 \cdot 5}{1 - 2 \cdot 5} = \infty$ نہا - جواب - انتہا = $\frac{5}{2}$

(ط) $\frac{1 - 2 \cdot 3}{3 - 2 \cdot 3} = \infty$ نہا - جواب - کوئی انتہا نہیں

(ی) $\frac{2 \cdot 9 - 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 2 \cdot 3} = \infty$ نہا - جواب - انتہا = ۷

(۲) اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے لا ایک سلسل تفاعل ہے۔

(۳) بتاؤ کہ لا کا کثیر رقمی جملہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے سلسل ہوتا ہے۔

(۴) $1 = \frac{1}{(1 - 2 \cdot 3)}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۵) $1 = \frac{1}{1 - 2 \cdot 3}$ اور $1 = \frac{1}{1 - 2 \cdot 3}$ کی ترسیم کھینچو اور ان کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۶) بتاؤ کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے $1 = \frac{1}{1 - 2 \cdot 3}$ سلسل ہے۔

(۷) تفاعل $\frac{1 - 2 \cdot 3}{3 + 2 \cdot 3}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل کی تحقیق کرو۔

(۸) تفاعل $\frac{1 - 2 \cdot 3}{1 + 2 \cdot 3}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۹) $1 = \frac{3}{(1 - 2 \cdot 3)(1 + 2 \cdot 3)}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۱۰) $1 = \frac{1}{(1 - 2 \cdot 3)}$ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ وہ کہاں غیر سلسل ہے۔

تیسرا باب

تفرق

دو مقادیر کے مابین جب باہمی تعلق معلوم ہو جاتا ہے تو اس کے ذریعہ
ایا جاسکتا ہے کہ ایک مقدار کی فلاں فلاں قیمت مقرر ہو تو اس کے تناظر
مقدار کی کیا قیمت ہوگی۔ اکثر مسئلوں میں صرف ان قیمتوں کے معلوم کرنے ہی
غائب نہیں کیا جاتا ہے بلکہ یہ بھی دریافت کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ ایک مقدار
ری مقدار کے ساتھ کس شرح سے بدلتی ہے۔ متغیر متبوع کے لحاظ سے اس کے
تفاعل کی تبدیلی کی شرح دریافت کرنے کو تفرق قانا کہتے ہیں۔ ذیل میں ہم
ان کے چند عام قواعد مستنبط کریں گے جو احصائے تفرقات میں بکثرت
مال ہوتے ہیں۔

تفاعل کے مشتق یا تفرقی سر کی تعریف —

اگر کہ $ما = ف (لا)$ متغیر متبوع لا کا کوئی تفاعل ہے۔ لا کی قیمت میں
نما اضافہ (مثبت یا منفی) مع لا واقع ہوتا ہے تو اس کے تناظر تفاعل
ت میں مع ما اضافہ ہوتا ہے۔

بر $ما = ف (لا)$ اور $ما + مع ما = ف (لا + مع لا)$

∴ مف م = ف (لا + مف لا) - ف (لا)

اور $\frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{ف (لا + مف لا)}}{\text{مف لا}} - \frac{\text{ف (لا)}}{\text{مف لا}}$

مف لا کے گھٹنے سے مف م بھی عدداً گھٹتا جائیگا۔ اگرچہ بصورت مف لا = صفر

$\frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}}$ (جوتفاوتوں کا حاصل تقسیم کہلاتا ہے) محدود یا معرف نہیں رہتا ہے لیکن

جیسے جیسے مف لا صفر کی طرف مائل یا قریب تر ہوتا ہے (مف لا → ۰)

تفاوتوں کا حاصل تقسیم $\frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}}$ ممکن ہے کہ کسی انتہا کو پہنچے۔ اگر وہ پہنچتا ہے

تو اس انتہا کو ماکاشق بلحاظ لا یا ماکاشق بلحاظ لا کہتے ہیں اور علامت

$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$ یا ماکاشق (لا) یا مف م سے تعبیر کرتے ہیں۔

پس $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{ف (لا + مف لا)}}{\text{مف لا}} - \frac{\text{ف (لا)}}{\text{مف لا}}$

عبارت میں یہ مفہوم اس طرح ادا کیا جاتا ہے: کسی تفاعل کا مشتق یا تفرقی سر اس تفاعل کے اضافہ کی متغیر متبوع کے اضافہ کے ساتھ نسبت ہے جبکہ موخر الذکر صفر تک بطور انتہا پہنچ جاتا ہے۔

تفرقی سر کی اس تعریف سے ظاہر ہے کہ وہ تفاعل کے تغیر کی عین شرح کو

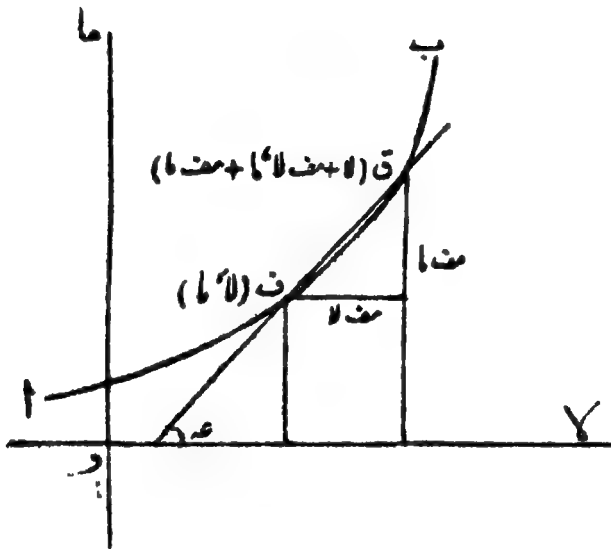
ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ $\frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}}$ وقفہ مف لا کے لیے تفاعل کی بلحاظ لا اوسط

شرح تغیر ہے۔ جیسے جیسے وقفہ مف لا چھوٹا ہوتا ہے اتنا ہی زیادہ قریب $\frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}}$ وقفہ فکر کے آغاز پر کی شرح تغیر کو تعبیر کرتا ہے۔ مف لا → ۰ کی صورت میں

$\frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا یعنی $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$ وقفہ کے مین آغاز پر کی شرح ہو جاتی ہے۔ پس

مقدار $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$ جو متغیر متبوع کی قیمت لا سے متعلق

دریافت کی جاتی ہے قیمت مذکور پر ما کی بلحاظ لا شرح تغیر ہے۔
 فرما $\frac{ما}{لا}$ کی علم بند سس کے ذریعہ ہی تعبیر کی جاسکتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل ۳۔
 اب تفاعل $ما = ف (لا)$ کی ترسیم ہے۔ $\frac{ما}{لا} = مس$ مہ
 قاطع خط $ف$ کی ڈھلان ہے۔ اگر نقطہ $ف$ کو ثابت مان کر $ما$ کو جتنا بھی
 چھوٹا لینگے اتنا ہی زیادہ قریب $\frac{ما}{لا}$ نقطہ $ف$ پر منحنی کے خطِ مماس کی



شکل ۳

ڈھلان کو تعبیر کریگا۔ پس $\frac{ما}{لا}$ کی انتہا جبکہ $لا \rightarrow 0$ ۔ نقطہ $ف$ پر منحنی

کی ڈھلان ہے یعنی مقدار $\frac{فرما}{لا}$ تفاعل $ما = ف (لا)$ کے منحنی کی

نقطہ $ف$ پر کے ڈھلان کی قیمت ہے۔ ذیل میں ہم تفاعلوں کے تفرق

کے عام قواعد ضابطوں کی شکل میں مستنبط کریں گے۔ ان ضابطوں میں 'و' و

سے مراد $لا$ کے تفاعل ہیں۔ 'ا' اور 'ن' مستقل متغیر ہیں۔ علامت $\frac{فرما}{لا}$

سے مراد فلاں مقدار کا مشتق یا تفرقی سر بلحاظ لا ہے۔
 چنانچہ $\frac{فر}{(و + و)}$ مقدار $(و + و)$ کا مشتق یا تفرقی سر بلحاظ لا ہے۔
 (۲) کسی متغیر کا اسی کے لحاظ سے مشتق اکائی ہے یعنی $\frac{فر}{فر} = ۱$

فرض کرو $ما = لا تب + ما + مع + لا$

∴ $مع + لا = مع + لا$

اور $\frac{مع + لا}{مع + لا} = ۱$ پس $\frac{فر}{فر} = ۱$ نہیاً $\frac{مع + لا}{مع + لا} = ۱$

(ب) کسی مستقل کا مشتق صفر ہے یعنی $\frac{فر}{فر} = ۰$

فرض کرو $ما = ۱$ چونکہ $ما$ کو ۱ یعنی مستقل مانا ہے اس لیے

$ما$ کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ اس لیے $مع + لا = ۰$ پس

$\frac{فر}{فر} = ۰$ نہیاً $\frac{مع + لا}{مع + لا} = ۰$

(ج) دو تغاٹوں کا مشتق ان کے مشتقوں کا حاصل جمع ہے۔ یعنی

$\frac{فر}{فر} = (و + و) = \frac{فر}{فر} + \frac{فر}{فر}$

فرض کرو کہ $ما = و + و$

لامیں در انحالیکہ $مع$ لا تغیر ہوتا ہے تو $ما$ میں $مع$ لا تغیر واقع ہوتا ہے۔ پس

$ما + مع + لا = و + و + مع + لا$

∴ $مع + لا = مع + لا$

اور $\frac{مع + لا}{مع + لا} = \frac{مع + لا}{مع + لا} + \frac{مع + لا}{مع + لا}$

$$\frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}}$$

(د) دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا مشتق مساوی ہے پہلے تفاعل مضروب دوسرے تفاعل کے مشتق جمع دوسرے تفاعل مضروب پہلے تفاعل کے مشتق کے یعنی

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} (و) = \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}}$$

فرض کرو م = و

$$\text{تب م} + \text{م} = \text{م} = (و + م) (و + م)$$

$$\therefore \text{م} = \text{م} = \text{م} + \text{م} + \text{م} + \text{م} + \text{م}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{م لا}} = \frac{\text{م}}{\text{م لا}} + \frac{\text{م}}{\text{م لا}} + \frac{\text{م}}{\text{م لا}} + \frac{\text{م}}{\text{م لا}}$$

$$\frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} + \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}}$$

$$\text{نتیجہ صریح - اگر م} = و \text{ تو چونکہ } \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} =$$

$$\text{لہذا } \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}} (و) = و \frac{\text{فرو}}{\text{فولا}}$$

(ه) دو تفاعلوں کے حاصل تقسیم کا مشتق مساوی ہے اس کسر کے جو نسبنا مضروب شمار کنندہ کے مشتق منفی شمار کنندہ مضروب نسبنا کے مشتق، کو نسبنا کے مربع پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یعنی

$$\frac{\frac{فر}{ولا} - \frac{فر}{ولا}}{و} = \left(\frac{1}{و}\right) \frac{فر}{ولا}$$

فرض کرو م = $\frac{1}{و}$

$$تب م + معن م = \frac{ر + معن و}{و + معن و}$$

$$معن م = \frac{ر + معن و}{و + معن و} - \frac{ر}{و}$$

$$= \frac{و معن و - ر معن و}{(و + معن و) و}$$

$$= \frac{\frac{معن و}{ولا} - \frac{ر معن و}{ولا}}{(و + معن و) و} = \frac{معن م}{معن لا}$$

$$پس بالآخر $\frac{فر}{ولا} = \frac{\frac{فر}{ولا} - \frac{ر}{ولا}}{و}$$$

نتیجہ م صریح - اگر م = $\frac{1}{و}$ تو چونکہ $\frac{فر}{ولا} = ۰$

$$\frac{\frac{فر}{ولا} - \frac{ر}{ولا}}{و} = \left(\frac{1}{و}\right) \frac{فر}{ولا}$$

(و) مستقل قوت نما دالے تفاعل کا مشتق سادی ہے حاصل ضرب قوت نما اور تفاعل کے جس کا قوت نما دیے ہوئے قوت نما سے بقدر ایک عدد کمتر ہو اور تفاعل کے مشتق کے - یعنی

$$\frac{فر}{ولا} (ن) = ن - ۱ \frac{فر}{ولا}$$

فرض کرو م = $\frac{ر}{ن}$ امد ن ایک مثبت صحیح عدد ہے
تب م + معن م = $(ر + معن و) (ن)$ جواز دوسرے ضابطہ مسئلہ ثنائی

$$\text{اور } \frac{فر(با)}{فرلا} = \frac{فر(ما)}{فرلا}$$

$$\text{پس سابقہ نتیجہ سے } ن \frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{فر(با)}{فرلا} \cdot م \frac{فر(ما)}{فرلا} = م \frac{فر(با)}{فرلا}$$

$$\therefore \frac{فر(با)}{فرلا} = \frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{م}{ن} \frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{م}{ن} \frac{فر(ما)}{فرلا}$$

$$= \frac{م}{ن} \frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{م}{ن} \frac{فر(ما)}{فرلا}$$

$$= \frac{م}{ن} \frac{فر(ما)}{فرلا}$$

اور اگر تفاعل کا قوت نامنفی صحیح عدد (م - م) ہو تو

$$\frac{1}{م} = \frac{م}{م} = 1$$

اور قاعدہ (۵) کے نتیجہ صحیح کی رُو سے

$$\frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{فر(ما)}{فرلا}$$

$$= \frac{فر(ما)}{فرلا}$$

پس $\frac{فر(ما)}{فرلا} = \frac{فر(ما)}{فرلا}$ خواہ ن مثبت ہو یا منفی ہو یا کسر ہو

نوٹ :- مندرجہ بالا تمام قاعدوں کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ
واور و متغیر متبوع لا کے مسلسل تفاعل ہیں۔

مثال (۱) ابتدائی اصل سے ۱ = ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ کا مشتق دریافت کرو۔
دراختمالیکہ لا = لا + مت لا تفاعل لا کی قیمت = ۱ + مت لا = ۱ -

$$۱ - اور ۱ + مع ۱ = (۱ + مع ۱) - ۱ - ۱ + (۱ + مع ۱) + ۱ - (۱ + مع ۱) - ۱$$

$$= ۱ + ۱ + مع ۱ + ۱ + (مع ۱) + (مع ۱)$$

$$+ \{ ۱ + ۱ + مع ۱ + (مع ۱) \}$$

$$+ ۱ + ۱ + مع ۱ - ۱$$

$$چونکہ ۱ = ۱ - ۱ + ۱ + ۱ - ۱$$

$$لہذا علی تفریق سے مع ۱ = ۱ + مع ۱ + ۱ + (مع ۱) + (مع ۱)$$

$$- ۱ - ۱ + مع ۱ - ۱ + (مع ۱) + ۱ + مع ۱$$

$$\therefore \frac{مع ۱}{مع ۱} = ۱ + ۱ + مع ۱ + ۱ - ۱ + (مع ۱) + ۱ + مع ۱$$

$$اس لیے \frac{۱}{۱} = \frac{مع ۱}{مع ۱} = ۱ + ۱ - ۱ + ۱ = ۱ + ۱ - ۱ + ۱$$

تفریق کے قاعدہ (و) کے اطلاق سے براہ راست یہی نتیجہ فوراً برآمد ہوتا

ہے۔ چنانچہ

$$\frac{۱}{۱} = ۱ + ۱ - ۱ + ۱ = ۱ + ۱ - ۱ + ۱ = ۱ + ۱ - ۱ + ۱$$

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱} = ۱ \quad \frac{۱}{۱} \text{ معلوم کرو۔}$$

$$۱ - (۱ + ۱) = ۱$$

$$\frac{۱}{۱} = (۱ - ۱) \frac{۱}{۱} + (۱ + ۱) \frac{۱}{۱} = (۱ - ۱) \frac{۱}{۱} + (۱ + ۱) \frac{۱}{۱}$$

$$= (۱ - ۱) \frac{۱}{۱} + (۱ + ۱) \frac{۱}{۱} = (۱ - ۱) \frac{۱}{۱} + (۱ + ۱) \frac{۱}{۱}$$

$$= \frac{۱}{۱ + ۱} - \frac{۱ - ۱}{۱(۱ + ۱)} =$$

$$-\frac{12}{2(1+1)} = -3$$

مثالیں

$$(1) 1 = (1+1)(1+1) \text{ بتاؤ کہ } \frac{12}{2(1+1)} = 1+1+1$$

$$(2) 1 = (1+1)(1+1) \text{ بتاؤ کہ } \frac{12-2(1+1)}{2(1+1)} = 1+1+1$$

(۳) لا کے مندرجہ ذیل تفاعلوں کو تفرق کرو:-

$$(1) 1 = \frac{12-2(1+1)}{2(1+1)} \text{ جواب } \frac{12-2(1+1)}{2(1+1)}$$

$$(2) 1 = \left(\frac{1}{1+1}\right) \text{ جواب } \frac{1}{1+1}$$

$$(3) 1 = \frac{1-1}{2(1+1)} \text{ جواب } \frac{1-1}{2(1+1)}$$

$$(4) 1 = \frac{1}{2(1+1)} \text{ جواب } \frac{1}{2(1+1)}$$

(۴) ایک منحنی کی مساوات $1 = \frac{1}{2(1+1)}$ ہے ثابت کرو کہ منحنی کے

اس نقطہ پر جہاں $1 = \frac{1}{2(1+1)}$ منحنی کا ڈھلان $2 - \frac{1}{2(1+1)}$ ہے۔

$$(5) 1 = \frac{12-2(1+1)}{2(1+1)} \text{ فرد معلوم کرو۔ جواب } \frac{12-2(1+1)}{2(1+1)}$$

مقلوب تفاعل - دو متغیروں کا درمیانی رابطہ تصریحاً دو طریقوں

میں سے کسی ایک طریقہ پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ جیسے اگر $ما = ف (لا) تو$
 $لا = فا (ما)$ ۔ پہلا طریقہ اُس صورت میں مفید ہوتا ہے جبکہ لا متغیر متبوع
 ہے اور دوسرا اُس وقت جبکہ ما متغیر متبوع ہے۔ مثال کے طور پر $ما = فولا$
 اور $لا = لوک$ ما پیش کیے جاسکتے ہیں جو ایک ہی رابطہ کے انہما کے دو جدا گانہ
 طریقے ہیں۔ ایک دوسری مثال $ما = لا^2$ اور $لا = \pm ما^2$ ہے۔

عام طور پر دو تفاعل $ما = ف (لا) \dots \dots \dots (۱)$

$لا = فا (ما) \dots \dots \dots (۲)$

باہد یگر مقلوب تفاعل کہلاتے ہیں اگر لا اور ما کی وہ تمام قیمتیں جو مساوات (۱)
 کے لیے صادق آتی ہیں مساوات (۲) کے لیے بھی صادق آئیں۔ اور اگر مساوات (۲) کے
 لیے جو قیمتیں صادق آتی ہیں مساوات (۱) کے لیے بھی صادق آئیں۔

واضح ہے کہ ایک ہی منحنی سے دو باہد یگر مقلوب تفاعلوں کی ترسیمی تعبیر ہوتی
 ہے۔ لیکن ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان دونوں تفاعلوں کے خواص عموماً
 مختلف ہوتے ہیں۔

ابھی ابھی جو مثال $ما = لا^2$ اور $لا = \pm ما^2$ دی گئی ہے ان کی
 ترسیموں سے ظاہر ہے کہ اول الذکر مساوات میں لا کی کسی ایک قیمت کے لیے
 ما کی بھی ایک ہی قیمت ہے۔ لیکن آخر الذکر مساوات میں ما کی ایک قیمت
 کے لیے لا کی دو جدا گانہ (مساوی مگر مختلف العلامت) قیمتیں ہیں۔ یعنی پہلی
 مساوات ما کی تعریف لا کے وحید القیمت تفاعل کی حیثیت سے کرتی ہے اور
 دوسری مساوات لا کو بحیثیت ما کے دو قیمت والے تفاعل کے متعارف
 کراتی ہے۔

(شر) مقلوب تفاعلوں کے تفرقی سروں (یا مشتقوں)

میں رابطہ۔

فرض کرو $ما = ف (لا)$ اور $لا = فا (ما)$

دو وحید القیمت مسلسل مقلوب تفاعل ہیں۔

اب ان مساواتوں میں فرض کرو کہ لا کو مف لا اضافہ دیا جاتا ہے اور اس کے متناظر ما کی قیمت میں مف ما اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ تب مف لا اور مف ما کی تمام قیمتوں کے لیے باسٹثنائے صفر قیمت کے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

اگر مف لا ←۔ اس طرح پر کہ وہ کبھی صفر نہیں ہونے پاتا تب بدیں وجہ کہ سندجہ بالا مساواتیں وحید اقلیت اور مسلسل مانی گئی ہیں مف ما ←۔ لیکن کبھی صفر نہیں ہوتا۔

$$\text{پس مف لا} \leftarrow \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{نہا}}{\frac{\text{مف ما}}{\frac{1}{\text{مف لا}}}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}}$$

مثال - اگر لا = لوا + ب + ج تو مقلوب تفاعل ما کا مشتق بلحاظ لا دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ لا} = \text{لوا} + \text{ب} + \text{ج} \quad \therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{1}{\text{لوا} + \text{ب}}$$

$$\text{لہذا} \quad \frac{1}{\text{لوا} + \text{ب}} = \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

(ح) کسی تفاعل کے تفاعل کا مشتق معلوم کرنے کا

آسان قاعدہ۔

فرض کرو ما = ف (س) اور س = ف (لا) دو دیے ہوئے

سلسلہ تعامل ہیں۔ اور ما کا مشتق بلحاظ لا دریافت کرنا مقصود ہے۔
 چونکہ $ما = ف$ [فہ (لا)] اس لیے واضح ہے کہ (ر) کے لیے
 اس کی قیمت فہ (لا) تعویض کرنے سے $\frac{فرا}{فلا}$ معلوم ہو سکتا ہے۔ لیکن اس
 تعریف کے بغیر بھی براہ راست $\frac{فرا}{فلا}$ دریافت ہو سکتا ہے۔ چنانچہ فرض کرو
 (ما، ر) اور (ر، لا) قیمتوں کے دو جفت ہیں جو دی ہوئی مساواتوں کے
 لیے علی الترتیب صادق آتی ہیں۔ اب اگر لا کی قیمت میں مف لا اضافہ ہوتا
 ہے تو ر کی قیمت میں مف ر اضافہ ہوگا اور نتیجہ کے طور پر ما کی قیمت میں
 مف ما اضافہ ہوگا۔ مگر مف لا اور مف ما کی تمام قیمتوں کے لیے با متضاد سفر

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}} \times \frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}}$$

پس اگر مف لا صفر کی طرف اس طرح مائل ہو (یعنی مف لا $\rightarrow 0$) کہ وہ گھٹتا
 چلا جائے مگر صفر نہ ہو جائے تو مف لا جب کافی چھوٹا ہوتا ہے تو مف ر $\rightarrow 0$ ۔
 اس طرح کہ وہ صفر نہیں ہونے پاتا اس لیے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}} \times \frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}} = \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}} \times \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}}$$

یعنی ما کا مشتق (یا تفرقی سر) بلحاظ لا حاصل ضرب ہے ما کے مشتق بلحاظ ر
 اور ر کے مشتق بلحاظ لا کے۔

$$\text{مثال۔} \quad ما = (1 + لا)^2 \quad \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}} \text{ دریافت کرو۔}$$

$$(1 + لا)^2 = ر \text{ لکھو پس } ما = (1 + لا)^2$$

$$\text{چونکہ } \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}} = \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}} \times \frac{\text{فرا}}{\text{فلا}}$$

$$\text{لہذا } \frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲} = (\text{م} ۱ - ۲) \text{ ن لا} ۱$$

$$\therefore \text{م} = (\text{لا} ۱ - ۲) \text{ ن لا} ۱ - ۱ = \text{م ن لا} ۱ - (\text{لا} ۱ - ۲)$$

طالب علم نے معلوم کر لیا ہوگا کہ قاعدہ (ز) جو متلوب تفاعلوں کے تفرقی سروں سے متعلق ہے قاعدہ (ح) کی ایک خاص صورت ہے۔

$$\text{کیونکہ } \frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲} = \frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲} \times \frac{\text{فر} ۲}{\text{فر} ۲}$$

$$\text{اگر } \text{م} = \text{لا} \text{ تو } \frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲} \times \frac{\text{فر} ۲}{\text{فر} ۲} = ۱$$

$$\text{یعنی } \frac{۱}{\frac{\text{فر} ۲}{\text{فر} ۱}} = \frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲}$$

تضمینی تفاعلوں کا تفرق — اگر ہم بحیثیت تفاعل لا ایک غیر مل شدہ مساوات کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو ماکو لا کا تضمینی تفاعل کہتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{لا}^۲ + \text{م}^۲ - ۳ \text{ لا م} = ۱$$

$$\text{لا} + ۲ = \text{لا م} + \text{م} + \text{اگ} + ۲ \text{ لا م} + \text{ج} = ۰$$

جب $(\text{لا} + \text{م}) = \text{لا م}$ وغیرہ اکثر اوقات تضمینی تفاعل کی مساوات کا حل کرنا مشکل ہوتا ہے کبھی نامکن بھی۔ تو ایسی صورتوں میں $\frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲}$ کی تعیین کے لیے مندرجہ ذیل قاعدہ استعمال کیا جاتا ہے۔ پہلے تضمینی تفاعل کی مساوات $\text{ف}(\text{لا}، \text{م}) = ۰$ کی ہر رقم بطور تفاعل لا تفرق کی جائے۔ اس طرح جو مساوات حاصل ہو اس کو $\frac{\text{فر} ۱}{\text{فر} ۲}$ کے لیے

حل کیا جائے۔ اس حل میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لیے جو جملہ دستیاب ہوگا اُس میں عموماً ما اور لا دونوں موجود ہونگے۔ لاکہ کسی مخصوص قیمت کے لیے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات ف (لا، ما) = .

میں لاکہ اس قیمت کے لیے ما کی متناظر قیمت دریافت کر لی جائے اور پھر

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے جملہ میں لا اور ما کی یہ خاص قیمتیں تعویض کی جائیں۔ مثلاً اگر

$$\text{لا} + \text{ما}^2 - \text{لا}^3 = 1 \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ دریافت کرو جبکہ لا} = 1$$

تو قاعدہ مصرعہ بالا کی رُو سے

$$1 = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا}^3 - \text{لا}^3 = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \quad \therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}^3}{\text{لا} - 1}$$

ابتدائی مساوات میں لا = 1 تعویض کرنے سے ما (لا، 1) = 3 = .

$$\therefore 1 = 1 \quad \text{یا} \quad 1 = 3$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} (\text{بمقام لا} = 1) = \frac{1}{1-1} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

مثالیں

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو:-

$$(1) \quad 1 = \text{لا} + \text{ما} - 1$$

$$(2) \quad \frac{2 + \text{لا}}{1 + \text{لا}} = 1$$

$$(3) \quad 5 = \text{لا} (1 - \text{لا}^2)$$

$$\text{جواب } \frac{1}{1 + \text{لا}^3}$$

$$\text{جواب } \frac{2(1 + \text{لا}^2)}{5\text{لا}^3 - 1}$$

$$\text{جواب } -\frac{1}{\text{لا}^2(1 - \text{لا}^2)}$$

چوتھا باب

قوت نامائی لوکار تھی اور مثلثی تفاعلوں کا

تفریق

۱۔ اس نصاب کی پہلی جلد میں قوت نامائی اور لوکار تھی تفاعلوں پر کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کی جا چکی ہے۔ ابتدائی الجبرا میں قوت نامائی تفاعل والا کی صرف اُن صورتوں میں تعریف کی جاتی ہے جبکہ لا ایک منطوق عدو ہے۔ حصاء میں چونکہ لا کا مسلسل تغیر ضروری ہے اس لیے لا کی قیمتیں منطوق وغیر منطوق دونوں نامائی جائیں گی۔ پہلے ہم اس کے مقلوب تفاعل یعنی لوک لا کا تفرقی سرمایہ مشق دریافت کر سیتے اور بعد ازاں خود اس کا (یعنی قوت نامائی تفاعل کا)

اگر $\text{ا} = \text{لوک لا}$ تو $\text{ا} = \text{لا}$ اور ما کو لا کا قوت ناما کہتے ہیں۔

ہم فرض کریں گے کہ لوک لا (جس میں $\text{ا} < \text{ا} = \text{ا}$) لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے ایک وحید القیمت مسلسل تفاعل ہے۔ لوکار تھوں کی اساس کے لیے یوں تو نظری حیثیت سے کسی بھی عدو کا انتخاب ممکن ہے۔ لیکن عام طور پر عملاً صرف ا اور قو (E) مستعمل ہیں۔ قو کی تعریف ذیل کے جملہ میں مضمر ہے:-

قو = نہا (ا + ی)

اگرچہ یہ بدیہی امر نہیں ہے کہ مندرجہ بالا انتہا موجود ہے لیکن اس مطالبہ

کے لیے صرف یہ کہ دنیا کافی ہوگا کہ فی الحقیقت ایسی انتہا وجود رکھتی ہے۔ ثبوت کے لیے آسکوڈ (Osgood) کی کتاب تفرقی وکلی احصا یا کسی اور بلند پایہ کی کتاب کا مطالعہ ہو سکتا ہے۔ قوی کسی اعشاری عدد کے ذریعے ٹھیک طور پر تعبیر نہیں ہو سکتی۔ ذیل میں اس کی قیمت اعشاریہ کے نومقاروں تک صحیح درج ہے :-

$$25618281828 \dots = 2$$

جلد اول میں لوگاریتموں کی اساس کی تبدیلی کے قاعدے بتائے گئے ہیں۔ ان کے لحاظ سے لوگ $2 = 3.0103$ لوگ $3 = 0.4771$ (اعشاریہ کے ہتھکڑی صحیح)

$$\text{اور لوگ } 2 = 0.3010 \text{ لوگ } 3 = 0.4771$$

۱. $\frac{1}{2}$ (لوگ 2) کی تعیین - جبکہ متفاعل 2 ہے
 فرض کرو $2 = 10^x$ لوگ 2

$$2 = 10^x \text{ لوگ } 2 = (1 + \text{مف } 2) \text{ اور اس لیے}$$

$$\text{مف } 2 = \text{لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2) - \text{لوگ } 2$$

$$= \text{لوگ } 2 - 1 - \text{مف } 2 = \text{لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2)$$

$$\text{پس } \frac{1}{2} = \frac{1}{\text{مف } 2} \text{ لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{مف } 2} \text{ لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2) = \frac{1}{2} \text{ لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\text{مف } 2} \text{ لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2) \text{ لوگ } 2 - (1 + \text{مف } 2)$$

چونکہ لوگ 2 مسلسل ہے اس لیے فرض کر لیا جاتا ہے کہ لوگ 2 کی انتہا مساوی ہے انتہا کے لوگ 2 کے۔ پس

$$\frac{فر}{لا} = \frac{1}{لا} \text{ لوک } [نسب (1 + \frac{مف}{لا})] \frac{مف}{لا}$$

اگر ہم $\frac{مف}{لا} =$ لکھیں تو $\frac{مف}{لا} =$ جبکہ $\frac{مف}{لا} =$ ۔

$$\text{لہذا } \frac{فر}{لا} = \frac{1}{لا} \text{ لوک } [نسب (1 + \frac{مف}{لا})]$$

$$= \frac{1}{لا} \text{ لوک } [نسب (1 + \frac{مف}{لا})]$$

$$\text{یعنی } \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا = \frac{1}{لا} \text{ لوک } لا$$

$$\text{اسی طرح } \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا = \frac{1}{لا} \text{ لوک } لا$$

اگر (در انجائیکہ < 0) لا کا ایک تفاعل ہے تب سابقہ باب کے قاعدہ (ح) کی روش سے

$$\frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا = \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا$$

$$\therefore \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا = \frac{1}{لا} \text{ لوک } لا = \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا$$

$$\text{پس واضح ہے کہ اگر } لا = 1 \text{ تو تو } \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا = \frac{فر}{لا} \text{ لوک } لا$$

تو کو کارتم کی اساس بنانے سے چونکہ عمل تفرق میں سہولت پیدا ہوتی ہے اس لیے احتیاط میں اسی کو اساس قرار دیتے ہیں اور جب ترقیم میں لوک کی کوئی اساس لکھی نہیں جاتی ہے تو سمجھ لیا جاتا ہے کہ اساس تو ہی ہے۔

یعنی لوک $لا$ سے مراد لوک $لا$ ہے۔

$$\text{مثال (۱) } لا = 1 \text{ لوک } لا = \frac{1}{لا} \text{ لوک } لا \text{ دریافت کرو۔}$$

$$\begin{aligned} \text{لوک} \frac{\text{لوک} - 1}{\text{لوک} + 1} &= \text{لوک} - 1 \\ \text{پس} \frac{\text{فر} - 1}{\text{فر} + 1} &= \frac{1}{\text{لوک} - 1} - \frac{1}{\text{لوک} + 1} \\ &= \frac{1}{\text{لوک} - 1} - \frac{1}{\text{لوک} + 1} = \frac{2}{\text{لوک}^2 - 1} \end{aligned}$$

مثال (۲) $r = \frac{(s-1)(s-b)}{s(s-j)}$ فر دریافت کرو۔

ہم بتائینگے کہ لوکارتموں کی مدد سے عمل تفرق بہت آسان ہو جاتا ہے۔

چنانچہ $\text{لوک } r = \frac{1}{2} \text{ لوک}(s-1) + \frac{1}{2} \text{ لوک}(s-b) - \frac{1}{2} \text{ لوک}(s) - \frac{1}{2} \text{ لوک}(s-j)$

$\therefore \frac{\text{فر لوک } r}{\text{فر } s} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{فر لوک}(s-1)}{\text{فر } s} + \frac{\text{فر لوک}(s-b)}{\text{فر } s} - \frac{\text{فر لوک}(s)}{\text{فر } s} - \frac{\text{فر لوک}(s-j)}{\text{فر } s} \right\}$

$\frac{r}{\text{فر } s} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-j} \right\}$

$\frac{\text{فر } r}{\text{فر } s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-j} \right)$

مثالیں

(۱) لوکارتمی تفرق کے ذریعہ مندرجہ ذیل تفاعلوں کا مشتق معلوم کرو:

(۱) $m = (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}$ جواب $\frac{3}{2} a b (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$

(ب) $m = \frac{a^2 (a+b)^2}{b^2 (a+c)^2}$ جواب $\frac{2a(a+b)(a+c) - (a+b)^2(a+c)}{b^2 (a+c)^3}$

(۲) $m = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ لوکارتمی تفرق کے ذریعہ

مثابت کر دو کہ اگر ما مان فرداً فرداً لا کے تفاعل میں تو

$$\frac{1}{\text{فرما}} \frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ما}} \frac{1}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{فرما}} \frac{1}{\text{فرلا}} + \dots + \frac{1}{\text{فرما}} \frac{1}{\text{فرلا}}$$

اور جب ما = ماہ = = مان = لا تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{ن لا}^{1-5}$

$$(3) \text{ ما} = \frac{(1-\text{لا})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(3-\text{لا})} \text{ بتاؤ کہ فرما} = \frac{(1-\text{لا})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(3-\text{لا})} \text{ فرلا}$$

$$(4) \text{ اگر ما} = \text{لا تو بتاؤ کہ فرما} = \text{لا} (1 + \text{لوک لا})$$

$$[\text{حل لوک ما} = \text{لا لوک لا} \therefore \frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{فرما}} (1 + \text{لوک لا})]$$

$$(5) \text{ اگر ما} = \text{ولا تو مثابت کر دو کہ فرما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \text{ ولا} (1 + \text{لوک لا})$$

$$[\text{حل لوک ما} = \text{لا} \therefore \frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{فرما}} \text{ ولا} (1 + \text{لوک لا})]$$

$$(6) \text{ ما} = \text{لا لوک لا فرما دریافت کرو۔ جواب ن لا لوک لا}^{1-5} \\ (\text{لوک لا} + 1)$$

$$(7) \text{ ما} = \text{لوک (لوک لا) بتاؤ فرما} = \frac{1}{\text{لا لوک لا}}$$

$$(8) \text{ لوک ما} = \frac{1-\text{لا}}{\text{لوک لا}} \text{ بتاؤ فرما} = \frac{1}{1-\text{لا}} - \frac{1}{\text{لا لوک لا}}$$

۳۳ فرما فرلا کی تعیین - جبکہ و تفاعل لا ہے

فرض کرو ما = و تب لوک ما = و لوک و
تضمینی تفاطوں کے تفرق کے قاعدہ سے

$$\frac{1}{\text{فرما}} \frac{1}{\text{فرلا}} = \text{لوک و} \therefore \frac{1}{\text{فرما}} = \text{لوک و} = \text{و لوک و}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \text{لوک} \times \frac{\text{و}}{\text{فری}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \text{لوک} \times \frac{\text{و}}{\text{فری}}$$

اگر اس ضابطہ میں و = نو لکھا جائے تو

$$\frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \frac{\text{و}}{\text{فری}}$$

مثال (۱) و کا تفرق - جبکہ و اور و دونوں لا کے

تفاضل ہیں۔

$$\text{فری} \text{ کر } ۱ = \text{و} \text{ تب لوک} = \text{و لوک}$$

$$\text{اور } \frac{۱}{\text{فری}} = \frac{\text{و}}{\text{فری}} + \frac{\text{لوک}}{\text{فری}}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{فری}} + \frac{\text{لوک}}{\text{فری}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فری}}{\text{فری}} = \left(\frac{\text{و}}{\text{فری}} + \frac{\text{لوک}}{\text{فری}} \right) \times \text{و}$$

$$\text{مثال (۲)} = \frac{\text{و} + \text{و}}{\text{و} - \text{و}} \text{ کا تفرق سرور یافت کرو۔}$$

$$\text{لوک} = \text{لوک} (\text{و} + \text{و}) - \text{لوک} (\text{و} - \text{و})$$

$$\therefore \frac{۱}{\text{فری}} = \frac{\text{فری}}{\text{فری}} \left[\frac{\text{لوک} (\text{و} + \text{و}) - \text{لوک} (\text{و} - \text{و})}{\text{فری}} \right]$$

$$\frac{\text{فری} (\text{و} + \text{و})}{\text{فری}} - \frac{\text{فری} (\text{و} - \text{و})}{\text{فری}} = \frac{\text{فری} (\text{و} - \text{و})}{\text{فری}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2 - x} = \frac{x - (x + 1)}{(x^2 + x)(x^2 - x)} = \frac{-1}{x^2(x^2 - 1)} \\
 &= \frac{-1}{x^2(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \\
 &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{x^2 - 1} \right) \\
 &= \frac{2}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{2}{x^2(x - 1)(x + 1)}
 \end{aligned}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل تفاعلوں کے مشتق دریافت کرو:-

- (۱) $\frac{1}{x} = x^{-1}$ جواب $-\frac{1}{x^2}$
- (۲) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ جواب $-\frac{2}{x^3}$
- (۳) $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ جواب $-\frac{3}{x^4}$
- (۴) $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ جواب $-\frac{4}{x^5}$
- (۵) $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$ جواب $-\frac{5}{x^6}$
- (۶) اگر $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ جواب $-\frac{2}{x^3}$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

(۸) اگر $\frac{1}{p} = 1$ تو ثابت کرو کہ

$$0 = \frac{p}{p+1} + \frac{p}{p+1}$$

(۹) $0 = \frac{p}{p+1}$ ثابت کرو کہ $\frac{p}{p+1} = \frac{p}{p+1}$ لو کہ

(۱۰) $\frac{p}{p+1} = 1$ دریافت کرو

$$\frac{p}{p+1} + 1 = \frac{p+1}{p+1}$$

[حل] $\frac{p}{p+1} = 1$ پس $p+1 = p$ اور $\frac{p}{p+1} = \frac{p}{p+1}$

ما کی دو درجی مساوات حل کرنے سے $p+1 = p$ یا $p+1 = p$

$$\left[\frac{p}{p+1} = \frac{p}{p+1} \right]$$

۴ فریب و کی تعیین جبکہ مسلسل تعامل لا ہے۔

فرض کرو کہ $p+1 = p$ جب p جس میں p کی نیم قطریوں میں پیش کی گئی ہے۔

$$\frac{p}{p+1} = \frac{p}{p+1} - \frac{p}{p+1}$$

$$= \frac{p}{p+1} - \frac{p}{p+1}$$

$$= \frac{p}{p+1} - \frac{p}{p+1}$$

$$\text{نہا جسم (لا + مغل)} = \text{جھ لا اور نہا جب مغل} = ۱$$

(جیسا کہ علم مثلث مستوی کی ابتدائی کتب میں طالب علم نے پڑھا ہوگا)

$$\text{پس فرض جب لا = جھ لا}$$

اگر ما = جب ر جبکہ مسلسل تغا ط لا ہے تو تفرق کے قاعدہ (ح)

کی نوے

$$\text{فرض جب ر = جھ ر فرض}$$

$$\text{فرض ر کی تعیین جبکہ مسلسل تغا ط لا ہے :-}$$

$$\text{فرض کرد جھ لا = ما تب مغل} = \frac{\text{جھ (لا + مغل)}}{\text{مغل}} - \text{جھ لا}$$

$$= \frac{۲ \text{ جب مغل جب (لا + مغل)}}{\text{مغل}}$$

$$= \frac{\text{جب مغل جب (لا + مغل)}}{\text{مغل}}$$

$$\text{نہا جب مغل} = ۱ \text{ اور جب (لا + مغل)} = \text{جب لا}$$

$$\therefore \text{فرض جھ لا = جب لا}$$

$$\text{اور اس لیے فرض جھ ر = جب لا فرض}$$

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فر}} (\text{مس}) = \text{قط}^2$ اور $\frac{\text{فر}}{\text{فر}}$

واضح ہے $\frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} (\text{جب})$ اور اصل تقسیم کے فرق کے قاعدہ کے

$\frac{\text{جم}^2 \text{ فر}^2 \text{ جب}^2 - \text{جم}^2 \text{ فر}^2 \text{ جب}^2}{\text{جم}^2} =$

$\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}} = \frac{\text{جم}^2 + \text{جب}^2}{\text{جم}^2} \times \frac{\text{فر}^2}{\text{فر}} = \text{قط}^2$

۷۔ $\frac{\text{فر}}{\text{فر}}$ مم کی تعیین جبکہ مسلسل تفاعل لا ہے۔

۸۔ کے طریقوں سے یا مم لا کو $\frac{1}{\text{مس}}$ لکھ کر طالب علم آسانی ثابت کر سکتا ہے کہ

$\frac{\text{فر مم}}{\text{فر}} = \frac{1}{\text{جب}} = \text{قم}^2$

اور $\frac{\text{فر}}{\text{فر}} (\text{مم}) = \text{قم}^2$ اور $\frac{\text{فر}}{\text{فر}}$

۹۔ $\frac{\text{فر قط}}{\text{فر}}$ کی تعیین جبکہ مسلسل تفاعل لا ہے

$\frac{1}{\text{جم}} = \text{قط}^2$

$\frac{\text{فر}}{\text{فر}} = \frac{\text{جب}}{\text{جم}} = \text{مس لا قط}$

اور $\frac{\text{فر قط}}{\text{فر}} = \text{مس لا قط}^2$

اسی طرح $\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{مہم و قہم}}{\text{فرلا}}$

مثال (۱) $\text{ما} = \text{اوجم ک ت} + \text{ب جب ک ت}$ ، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = - (\text{اوجم ک ت} + \text{ب جب ک ت})$

$= - \text{اوجم ک ت} + \text{ب جب ک ت}$

مثال (۲) $\text{ما} = \text{اوس (جب لا)}$ کو تفرق کرو۔

فرض کرو جب لا = ا $\therefore \text{اوس} = \text{ما}$

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر (اوس)}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{اوس}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{اوجم ک ت}}{\text{فرلا}}$

$= \frac{\text{اوجم ک ت}}{\text{فرلا}} = \text{اوجم ک ت}$

۹۔ $\frac{\text{فر جب لا}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین جبکہ مسلسل تعامل لا ہے۔

اور $\frac{\pi}{4} \geq \text{جب لا} \geq \frac{\pi}{4}$

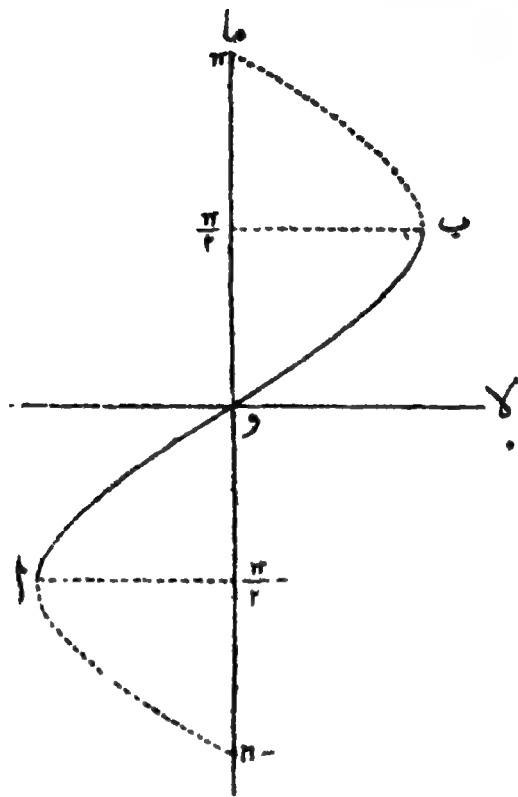
فرض کرو $\text{ما} = \text{جب لا}$ $\frac{\pi}{4} \geq \text{جب لا} \geq \frac{\pi}{4}$ (۱)

(ب) $\text{لا} = \text{جب ما}$

شکل (۵) میں مسلسل مواظ لاوب دونوں تعاملوں (۱) اور (ب) کی ترسیم ہے۔

ما کو جب $\frac{\pi}{4}$ سے $\frac{\pi}{4}$ تک کے وقفہ میں محدود رکھتے ہیں تو تعامل $\text{ما} = \text{جب لا}$ وحید القیث ہوتا ہے۔

(ب) کو لمحاظ لا تفرق کرنے سے $\text{اوجم ما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$



شکل ۵

ترسیم ما = جب لا

لیکن جم ما = لا - جب ما = لا - ۱

$$\therefore \frac{1}{\frac{1}{\text{لا} - ۱}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

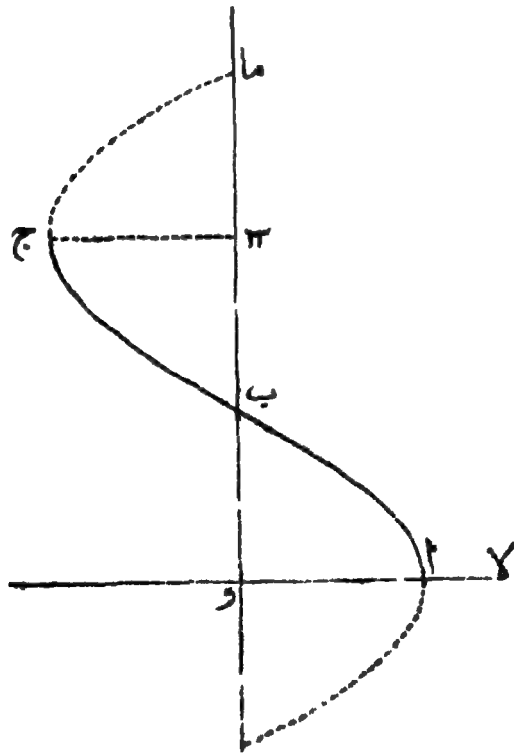
پس $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{لا} - ۱}}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{جب لا} \leq \frac{\pi}{2}$$

۱۔ فرجم $\frac{a}{r}$ کی تعیین -

فرض کرو $\frac{a}{r} = \text{جم } a$. $\text{جم } a \geq \pi$ (۱)

(ب) $\frac{a}{r} = \text{جم } a$
 شکل میں سلسلہ موٹا خط اب ج دونوں تفاعلوں (۱) اور (ب) کی
 ترسیم ہے۔



شکل ۶

ترسیم $\frac{a}{r} = \text{جم } a$ سے
 (ب) کو ملنا $\frac{a}{r}$ تفرق کرنے سے $\frac{a}{r} = 1$ جب $\frac{a}{r} = 1$

$$\text{لیکن جب } \alpha = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \alpha^2} \quad \therefore \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

$$\text{پس } \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

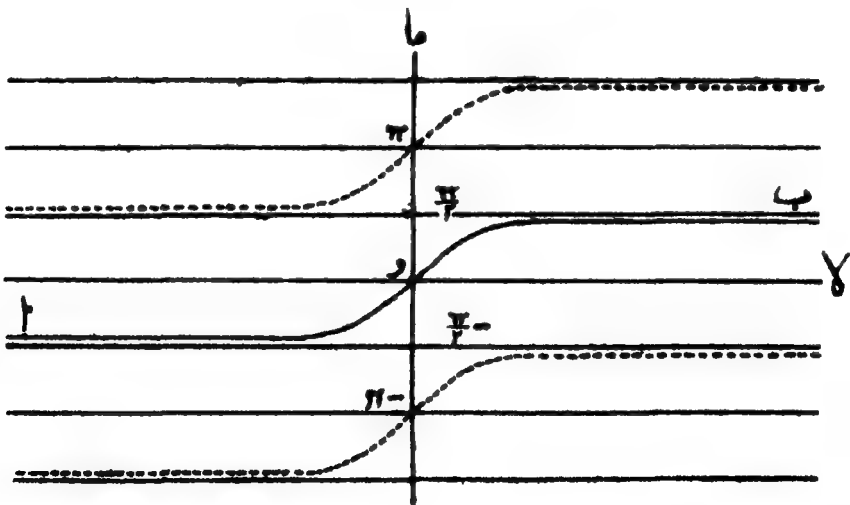
$$\alpha \geq \beta \geq 0$$

۱۱ فرض α کی تعیین۔

فرض کرو $\alpha = \sin \alpha$ ' $\frac{\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{4}$ (۱)

(ب) $\alpha = \sin \alpha$ (۲)

شکل ۱ میں مسلسل موافق خط α و β دونوں تقاطعوں (۱) اور (۲) کی ترسیم ہے۔



شکل ۱
ترسیم $\alpha = \sin \alpha$

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $1 = \frac{\text{ق}^2 \text{ا}}{\text{ق}^2 \text{ب}}$

لیکن $\text{ق}^2 \text{ا} = 1 + \text{مس}^2 \text{ا} = 1 + \text{لا}^2$

$\therefore \frac{1}{\text{ق}^2 \text{ب}} = \frac{1}{1 + \text{لا}^2}$

پس $\frac{\text{فر}}{\text{ق}^2 \text{ب}} \text{ مس}^2 \text{ا} = \frac{1}{\text{ق}^2 \text{ب}} \frac{\text{فر}}{1 + \text{لا}^2}$ ، $\frac{\pi}{2} > \text{مس}^2 \text{ا} > \frac{\pi}{4}$

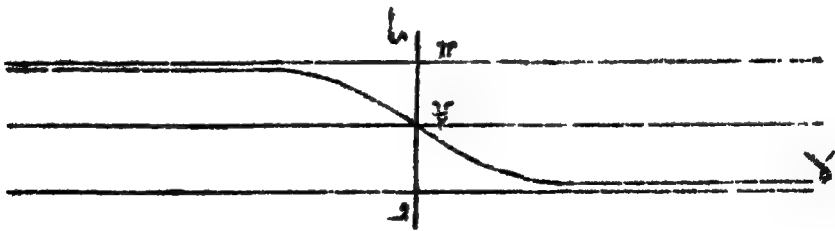
۱۳۔ $\frac{\text{فر مم}^2 \text{ا}}{\text{ق}^2 \text{ب}}$ کی تعیین -

فرض کرو $\text{لا} = \text{مم}^2 \text{ا}$ ، $0 < \text{مم}^2 \text{ا} < \pi$ (۱)

(ب) $\text{لا} = \text{مم}^2 \text{ب}$

شکل ۷ میں دونوں تفاعلوں کی ترسیم دج ہے -

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $1 = \frac{\text{ق}^2 \text{ب}}{\text{ق}^2 \text{ا}}$ -



شکل ۷
ترسیم $\text{لا} = \text{مم}^2 \text{ا}$

لیکن $ق^۱ م^۱ = ۱ + م^۱ م^۱ = ۱ + ۱ = ۲$

$$\frac{1}{r_u + 1} - = \frac{فر_1}{فر_u}$$

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $1 = \text{قط ماس} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

$$\therefore \frac{1}{\text{قط ماس} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

لیکن چونکہ $\text{قط}^1 \text{ما} = 1 + \text{مس}^1 \text{ما}$ لہذا $\text{مس}^1 \text{ما} = \text{قط}^1 \text{ما} - 1 = 1 - \text{لا}^1$

$$\therefore \text{مس}^1 \text{ما} = 1 - \text{لا}^1$$

$$\text{اور} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{1 - \text{لا}^1 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} > \text{قط}^1 \text{ا} \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} - > \text{قط}^1 \text{ا} \geq \pi - \end{array} \right\} \frac{1}{1 - \text{لا}^1 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}} = \text{قط}^1 \text{ا} = \text{فر} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

۱۴۱ فرقم^۱ ا کی تعیین -

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرم}^1 \text{ا} \geq 0 \\ \text{فرم}^1 \text{ا} \geq \pi - \end{array} \right\} \text{فرض کرو} \text{ا} = \text{فرم}^1 \text{ا} \quad (1) \dots$$

$$(ب) \dots \dots \dots \text{لا} = \text{فرم}^1 \text{ا}$$

شکل نمبر ۱ میں مسلسل موٹا خط دونوں تفاعلوں کی ترسیم ہے -

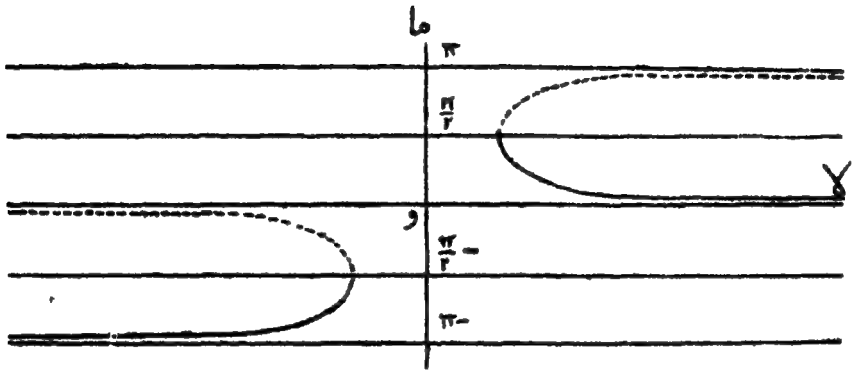
(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $1 = \text{فرم}^1 \text{ا} - \text{فرم}^1 \text{ا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

$$\therefore \frac{1}{\text{فرم}^1 \text{ا} - \text{فرم}^1 \text{ا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

لیکن چونکہ $\text{فرم}^1 \text{ا} = 1 + \text{فرم}^1 \text{ا}$ لہذا $\text{فرم}^1 \text{ا} = \text{فرم}^1 \text{ا} - 1 = 1 - \text{لا}^1$

$$\therefore \text{فرم}^1 \text{ا} = 1 - \text{لا}^1$$

$$\text{اور } \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = - \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{فر لا}}}$$



شکل ۱۰

ترسیم ما = قم لا

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \geq \text{قم لا} \\ \frac{\pi}{2} - \geq \text{قم لا} \end{array} \right\} \frac{1}{\text{فر لا}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{فر لا}}}$$

۱۵ جب ط کے تفرق کا ہندسی ثبوت -

شکل ۱۱ میں و مرکز کا نصف دائرہ کھینچا گیا ہے۔ ولا ء و ما علی الترتیب لا اور ما کے محدود ہیں۔ زاویہ لا وف کو اگر نیم قطری پیمانہ پر ط سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ط} = \frac{\text{قوس ف لا}}{\text{وف}} \text{ اور } \text{ط} = \frac{\text{قوس ف ق}}{\text{وف}}$$

فرض کرو حجم ۱۲ = ۵

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فر}} = \frac{\text{فرجم}^1}{\text{فر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فر}}$$

$$= \frac{1}{12-1} = \frac{\text{فرجم}^1}{\text{فر}} = \frac{1}{12-1} \times (-2 \text{ جب } 12) =$$

$$= \frac{1}{12-1} \times 2 \text{ جب } 12 = 2$$

مثال (۲) مولاً جم ۱۱ کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

فرض کرو مولاً جم ۱۱ = ۱۱

لوکارتی لینے سے لوک ۱۱ = لوک مولاً + لوک جم ۱۱

$$= \text{لوک} + \text{لوک جم}^1$$

$$\therefore \frac{1}{11} = \frac{\text{فرما}}{\text{فر}} = \text{لوک} (1 + \text{لوک } 11) - \text{جم}^1 \frac{1}{11-1}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فر}} = 11 \left[\text{لوک} (1 + \text{لوک } 11) - \text{جم}^1 \frac{1}{11-1} \right]$$

مثال (۳) اگر ۱۱ = ۲ مس ۱ $\left(\frac{11-1}{11+1} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{\text{فرما}}{\text{فر}} = \frac{1}{11-1}$$

$$\text{چونکہ } \frac{1}{11} = \text{مس}^1 \left(\frac{11-1}{11+1} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ لہذا } 1 + \text{مس}^2 \frac{1}{11} = 1 + \frac{11-1}{11+1}$$

$$\text{یعنی قسط } \frac{1}{11} = \frac{1}{11+1}$$

$$\therefore \text{جم } \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} \text{ اور } 2 \text{ جم } \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \text{جم } \frac{1}{2}$$

$$\text{تفرق کرنے سے } 1 = \frac{\text{فرجم } 1}{\text{فر } 1} = - \text{جب } \frac{1}{\text{فر } 1} \text{ پس } \frac{1}{\text{فر } 1} = \frac{1}{\text{جم } 1}$$

$$\text{جب } 1 = \frac{1}{\text{فر } 1}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{فر } 1} = \frac{1}{\text{فر } 1}$$

$$\text{مثال (۴) } 1 = \frac{\text{فر } 1 \times (1-1)}{\text{فر } 1} \text{ کو بحفاظت لا تفرق کرو۔}$$

$$1 = \frac{1}{\text{فر } 1} \times \text{فر } 1 = (1-1) \times \text{فر } 1$$

$$\text{لوکار تم لینے سے } 1 = \frac{1}{\text{فر } 1} \times \text{فر } 1 = (1-1) \times \text{فر } 1$$

$$\therefore \frac{1}{\text{فر } 1} + \frac{1}{\text{فر } 1} = \frac{1}{\text{فر } 1} + \frac{1}{\text{فر } 1}$$

$$\frac{1}{\text{فر } 1} - \frac{1}{\text{فر } 1} + \frac{1}{\text{فر } 1} = \frac{1}{\text{فر } 1}$$

$$\frac{(1-1) \times 1 - (1-1) \times 1 + (1-1) \times 1}{(1-1) \times (1-1)} =$$

$$\therefore \frac{1}{\text{فر } 1} = \frac{1}{\text{فر } 1}$$

$$\frac{1 \times (1-1)}{(1-1) \times (1-1)} =$$

$$\frac{(1-1) \times 1}{(1-1) \times (1-1)} =$$

$$\text{مثال (۵) } ۱ = \frac{\sqrt{۱+۱} + \sqrt{۱-۱}}{\sqrt{۱+۱} - \sqrt{۱-۱}} \text{ مس}^{-۱}$$

$$\therefore \text{ مس } ۱ = \frac{\sqrt{۱+۱} + \sqrt{۱-۱}}{\sqrt{۱+۱} - \sqrt{۱-۱}}$$

$$\frac{\sqrt{۱+۱}}{\sqrt{۱-۱}} = \frac{\text{مس } ۱ + ۱}{\text{مس } ۱ - ۱} \text{ نسبتوں کے خواص سے}$$

$$\frac{\sqrt{۱+۱}}{\sqrt{۱-۱}} = \frac{\text{مس } ۱ + ۱}{\text{مس } ۱ - ۱} \text{ مربع کرنے سے}$$

$$\text{اور بالآخر } \sqrt{۱} = \frac{(\text{مس } ۱ + ۱) - (\text{مس } ۱ - ۱)}{(\text{مس } ۱ + ۱) + (\text{مس } ۱ - ۱)} = \frac{۲ \text{ مس } ۱}{۲ \text{ مس } ۱ + ۱} \text{ جب } ۱ =$$

$$\therefore \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}} = \frac{\sqrt{۱}}{\text{جم } ۱} = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱}} \therefore \sqrt{۱} = ۱ \text{ جم } ۱ = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}}$$

مشائیں

ذیل کے تغاطوں کو بجا لا تفرق کرو۔

$$\text{جواب } \frac{۱}{\sqrt{۱-۱}} = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}}$$

$$(۱) ۱ = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}} \text{ (نوٹ لا)}$$

$$= \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}} + ۱ - ۱ = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}} \text{ (ن نوٹ لا)}$$

$$(۲) ۱ = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}}$$

$$\text{جواب } \frac{۱}{\sqrt{۱-۱}} = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}}$$

$$(۳) ۱ = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}}$$

$$\frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}} = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}} \text{ جواب}$$

$$(۴) ۱ = \frac{\sqrt{۱}}{\sqrt{۱-۱}}$$

$$(۵) ۱ = (اُجب ۱ + بجم ۱) \text{ جواب } = ن (اُب ۱ + ب ۱) (اُجب ۱ + بجم ۱)$$

$$(۶) ۱ = \sqrt[۲]{اُقط ۱ - ۱} \text{ جواب } = \frac{۱}{اُقط ۱ - ۱} \text{ مس } ۱ - ۱, \sqrt[۲]{اُقط ۱ - ۱}$$

$$(۷) ۱ = \frac{۱}{اُقط ۱ - ۱} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ جواب } = \left\{ \frac{۱}{اُقط ۱ + ۱} + \frac{۱}{اُقط ۱ - ۱} \right\} (اُقط ۱ + ۱)$$

$$(۸) ۱ = \frac{اُقط ۱ - ۱}{اُقط ۱ + ۱} \text{ جواب } = \frac{۲}{(اُقط ۱ + ۱)}$$

$$(۹) ۱ = \frac{اُقط ۱ - ۱}{اُقط ۱ + ۱} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ جواب } = \frac{۱}{۲}$$

$$(۱۰) ۱ = \frac{اُقط ۱ + بجم ۱}{اُقط ۱ + ۱} \text{ جواب } = \frac{اُقط ۱ - ۱}{اُقط ۱ + ۱}$$

$$(۱۱) ۱ = \frac{اُقط ۱ + ۱}{اُقط ۱ + ۱} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ جواب } = \frac{۱}{(اُقط ۱ + ۱)}$$

$$(۱۲) ۱ = \frac{اُقط ۱}{اُقط ۱ + ۱} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ جواب } = \frac{اُقط ۱}{اُقط ۱ + ۱}$$

$$(۱۳) ۱ = \frac{اُقط ۱ - ۱}{اُقط ۱ + ۱} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ جواب } = \frac{اُقط ۱ - ۱}{اُقط ۱ + ۱}$$

$$(۱۴) ۱ = \sqrt[۲]{اُقط ۱ - ۱}$$

$$\text{جواب } = \frac{۱}{اُقط ۱ - ۱} \left(\sqrt[۲]{اُقط ۱ - ۱} + \sqrt[۲]{اُقط ۱ - ۱} \right)$$

$$(۱۵) ۱ = \frac{اُقط ۱ + ۱}{اُقط ۱ - ۱} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ اشارہ - بیان } = \frac{اُقط ۱ + ۱}{اُقط ۱ - ۱}$$

$$\text{جواب } = \frac{۱}{(اُقط ۱ + ۱)}$$

$$(۱۶) \text{ لوک } \left(\frac{اُقط ۱ + ۱}{اُقط ۱ - ۱} \right) - \frac{۱}{۲} \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ جواب } = \frac{اُقط ۱}{اُقط ۱ - ۱}$$

$$(16) \text{ لوک} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1} + \text{مس}^{-1} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \text{ جواب} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$(18) \text{ لوک} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \text{ مس}^{-1} \text{ لا} \text{ جواب} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$(19) \text{ لوک} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \text{ مس}^{-1} \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \text{ جواب} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\text{جواب} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$(20) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{f}{g} \text{ (جب } g \text{ حجم } g \text{، } 1 - \text{ج}^2 \text{ جب } g^2 \text{)}$$

$$= \frac{1 - \text{ج}^2 + \text{ج}^2 + \text{ج}^2}{1 - \text{ج}^2 + \text{ج}^2 + \text{ج}^2}$$

$$\text{جس میں } 1 = 3 \text{ ج}^2 \text{، } 2 = 2 \text{ ج}^2 \text{ اور } 1 = 1$$

پانچواں باب

متواتر تفرق

۱۔ متواتر تفرق — اب تک ہم نے واحد متغیر کے مختلف
تفاعلوں کو تفرق کرنے کے قاعدوں کا مطالعہ کیا۔ چونکہ ما = ف (لا)
کا تفرقی سر یا مشتق عموماً لا کا ایک دوسرا تفاعل ہوتا ہے اس لیے بلحاظ
لا اس کو مکرر تفرق کر سکتے ہیں۔ $\frac{ف}{لا}$ کا یہ تفرقی سر یا مشتق بلحاظ
لا ابتدائی تفاعل یعنی ما کا دوسرا تفرقی سر یا دوسرا مشتق
کہلاتا ہے اور اس کے لیے علامات $\frac{ف}{لا}$ یا ما یا عفا یا عفا
استعمال کیے جاتے ہیں۔

اسی طرح $\frac{ف}{لا}$ کا مشتق بلحاظ لا ابتدائی تفاعل ما کا تیسرا تفرقی سر
یا تیسرا مشتق بلحاظ لا کہلاتا ہے۔ اور $\frac{ف}{لا}$ وغیرہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔
تین سے بالاتر یا اعلیٰ مشتقات کے لیے بھی اسی اصول کے بموجب نام مستعمل ہیں۔
چنانچہ ما کا ن۔ وال مشتق بلحاظ لا $\frac{ف}{لا}$ یا ما^(ن) یا عفا^(ن) وغیرہ

تعبیر کیا جاتا ہے اور ماکو لمجاظ لا متواتر ن مرتبہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

متواتر تفرق کو میکانیات اور ہندسہ میں بڑی اہمیت حاصل ہے۔

مثال $\frac{1}{1+u}$ کا دوسرا اور ن۔ واں تفرقی سر یا مشتق دریافت کرو۔

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} \quad \text{فرض} \quad \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} \quad \text{فرض} \quad \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

۳۔ ان کے مشتق تفاعلات۔ جس میں ن ایک مستقل ہے۔ فرض کرو $u = 1$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u} = \frac{1}{1+u}$$

اور ن سے بالاتر مشتقات معدوم ہوتے ہیں۔

اگر ن کسر یا منفی قوت نما ہو تو ن کے بعد کے مشتقات میں سے کوئی مشتق معدوم نہ ہو سکیگا۔

۳۔ اگر $م = لا^{۱-ن}$ کوک لا تو $\frac{فر۱}{فر۱-لا}$ کی تعیین۔

$$\frac{فر۱}{فر۱-لا} = (۱-ن) لا^{۱-ن} کوک لا + \frac{۱}{لا} لا^{۱-ن} = (۱-ن) لا^{۱-ن} کوک لا + لا^{۱-ن}$$

$$\frac{فر۲}{فر۲-لا} = (۱-ن)(۲-ن) لا^{۲-ن} کوک لا + \frac{(۱-ن) لا^{۱-ن}}{لا} + لا^{۲-ن} (۲-ن) =$$

$$= (۱-ن)(۲-ن) لا^{۲-ن} کوک لا + لا^{۲-ن} (۲-ن + ۱-ن) +$$

$$\dots + \frac{فر۱-ن}{فر۱-ن-لا} = (۱-ن)(۲-ن) \dots کوک لا + (۱-ن)(۲-ن) \dots +$$

$$1(۰ \dots + ۲-ن + ۱-ن) +$$

$$\therefore \frac{فر۱}{فر۱-لا} = \frac{۱-ن}{لا} + \dots +$$

اس شال میں ظاہر ہے کہ عمل تفرق جیسا جیسا آگے کو بڑھتا جاتا ہے وہ تمام رقوم نظر انداز کیے جاسکتے ہیں جن میں کوک لا بطور جزو ضربی موجود نہیں ہوتا ہے۔

۴۔ $م = جب م لا$ کے مشتق تفاعلات۔

$$\frac{فر۱}{لا} = م جم م لا \quad اور \quad \frac{فر۲}{لا} = م جب م لا$$

$$\left\{ \begin{aligned} اور عام طور پر \quad \frac{فر۱+۲}{لا^{۱+۲}} &= (۱-ن) م جب م لا \\ \frac{فر۱+۲+۳}{لا^{۱+۲+۳}} &= (۱-ن) م^{۱+۲} جم م لا \end{aligned} \right.$$

یہ دونوں نتائج ایک مساوات کے ذریعہ ظاہر کیے جاسکتے ہیں چنانچہ

$$\left(\frac{فر۱}{لا} \right) جب م لا = م جب (م لا + \frac{۲}{لا})$$

$$\left(\frac{فر۲}{لا} \right) جم م لا = م جم (م لا + \frac{۳}{لا})$$

۵۔ ما = مولا کے مشتق تفاعلات -

$$\frac{\text{فر}^1 \text{ما}}{\text{فر}^1 \text{لا}} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} = \frac{\text{فر}^3 \text{ما}}{\text{فر}^3 \text{لا}} \text{ اور اسی طرح } \frac{\text{فر}^n \text{ما}}{\text{فر}^n \text{لا}} = \frac{\text{فر}^{n+1} \text{ما}}{\text{فر}^{n+1} \text{لا}}$$

اگر $\frac{\text{فر}^n \text{ما}}{\text{فر}^n \text{لا}}$ کے عوض سہولت کی خاطر ن - ویں مشتق کے لیے $(\frac{\text{فر}^n}{\text{فر}^n})$ لکھا جائے تو اس ترتیم کے بموجب

$$\{ 1. (\frac{\text{فر}^1}{\text{فر}^1}) + 2. (\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}) + 3. (\frac{\text{فر}^3}{\text{فر}^3}) + \dots + n. (\frac{\text{فر}^n}{\text{فر}^n}) \} \text{ مولا}$$

$$= 1. (\frac{\text{فر}^1}{\text{فر}^1}) \text{ مولا} + 2. (\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2}) \text{ مولا} + 3. (\frac{\text{فر}^3}{\text{فر}^3}) \text{ مولا} + \dots + n. (\frac{\text{فر}^n}{\text{فر}^n}) \text{ مولا}$$

$$= 1. \text{فر}^1 \text{ مولا} + 2. \text{فر}^2 \text{ مولا} + 3. \text{فر}^3 \text{ مولا} + \dots + n. \text{فر}^n \text{ مولا}$$

$$= \{ 1. \text{فر}^1 + 2. \text{فر}^2 + 3. \text{فر}^3 + \dots + n. \text{فر}^n \} \text{ مولا}$$

اور اگر 1. لا + 2. لا + 3. لا + ... + n. لا کو ذ (لا) تفاعل سے تعبیر کیا جائے تو

مصرعہ بالا نتیجہ بشکل ذ $(\frac{\text{فر}^n}{\text{فر}^n}) \text{ مولا} = \text{ذ} (1. \text{مولا})$ لکھا جاسکتا ہے

اس مفروضہ پر کہ تفاعل ذ (1) میں 1 کی صرف مثبت صحیح قوتیں شریک ہیں -

۶۔ ما = مولا جب ب لا کا ن - وال تفرقی سر -

$$\frac{\text{فر}^1 \text{ما}}{\text{فر}^1 \text{لا}} = \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر}^2 \text{لا}} = \frac{\text{فر}^3 \text{ما}}{\text{فر}^3 \text{لا}} \text{ (ا جب ب لا + ب جم ب لا)}$$

$$\text{اگر مس ذ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \text{ تو ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} + \text{ب} \text{ جب ذ}$$

$$اور 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$پس \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$اور \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\therefore \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$اسی طرح \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$مک مس 1 \left(\frac{1}{n} \right) اور مس 2 \left(\frac{1}{n} \right) کی تعیین -$$

$$(1) فرض کرو 1 = مس 1 \left(\frac{1}{n} \right) یا 1 = مم 1$$

$$تب \frac{1}{n} = - مم 2 = - (1 + 1)$$

$$\therefore \frac{1}{n} = \frac{1}{1+1} = - جب 2$$

$$اس لیے \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right) = - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right) = - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$= جب 2 \left(\frac{1}{n} \right) = جب 2$$

$$مکرر \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right) = - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right) = - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$= - 2 \left(\frac{1}{n} \right) = - 2 \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$اسی طرح \frac{1}{n} = 1 \times 2 \times 3 = جب 3$$

$$۱ \text{ اور عام طور پر } \frac{\text{فرن } م}{\text{فر لا } ن} = (۱-۱) \frac{ن}{ن-۱} \text{ جب } م \text{ جب } ن$$

$$(ب) \text{ چونکہ } م \text{ لا} = \frac{۳}{۴} - م \text{ لا} = \frac{۱}{۵}$$

$$\text{فرن (م لا)} = \frac{(۱-۱) \frac{ن}{ن-۱}}{\text{فر لا } ن} \text{ جب } م \text{ جب } ن$$

جس میں $م = م \text{ لا}$ ، حسب سابق مندرجہ بالا نتیجہ اس طرح سے بھی لکھا جاسکتا ہے:

$$\text{فرن (م لا)} = \frac{(۱-۱) \frac{ن}{ن-۱}}{\text{فر لا } ن} \text{ جب (ن م لا) } \frac{۱}{۵}$$

۷۔ اگر $م = م \text{ جب } (م جب لا)$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱-لا) \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) - لا \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) + م^۲ = ۰$$

دیے ہوئے تغافل کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} = \frac{م \text{ جم (م جب لا)}}{لا-۱}$$

$$\therefore (۱-لا) \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) = م^۲ \text{ جم (م جب لا)}$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$(۱-لا)^۲ \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) - لا^۲ \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) = م^۲ \text{ جم (م جب لا) جب (م جب لا) } م$$

$$\therefore (۱-لا)^۲ \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) - لا^۲ \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) = م^۲ \text{ جم (م جب لا) جب (م جب لا)}$$

$$\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \text{ پر تقسیم کرنے سے } (۱-لا) \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) - لا \left(\frac{\text{فر } م}{\text{فر لا } ن} \right) + م^۲ \text{ جم (م جب لا) جب (م جب لا) } م$$

$$\therefore (1 - لا) \frac{فرما^2}{فرلا} - لا \frac{فرما}{فرلا} + م^2 = 0$$

مثال (۱) اگر ما = $\frac{(لا + ب)}{(ج + لا)}$ تو ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^3 = \frac{فرما}{فرلا} \times \frac{فرما}{فرلا} \times \frac{فرما}{فرلا}$$

$$\frac{1}{ج + لا} + \frac{(لا + ب)}{(ج + لا)^2} = \frac{فرما}{فرلا}$$

$$\frac{2}{(ج + لا)^2} - \frac{(لا + ب)^2}{(ج + لا)^3} = \frac{فرما^2}{فرلا^2}$$

$$\frac{6}{(ج + لا)^3} + \frac{(لا + ب)^3}{(ج + لا)^4} = \frac{فرما^3}{فرلا^3}$$

$$\text{پس } \frac{فرما^2}{فرلا^2} \times \frac{فرما}{فرلا} = \left\{ \frac{6}{(ج + لا)^3} + \frac{(لا + ب)^3}{(ج + لا)^4} - \frac{(لا + ب)^2}{(ج + لا)^3} \right\} \times \frac{فرما}{فرلا}$$

$$\left\{ \frac{6}{(ج + لا)^3} + \right.$$

$$\left. \frac{6}{(ج + لا)^3} + \frac{(لا + ب)^3}{(ج + لا)^4} - \frac{(لا + ب)^2}{(ج + لا)^3} \right\} \times \frac{فرما}{فرلا} = \frac{فرما^3}{فرلا^3}$$

اور واضح ہے کہ یہ دونوں مساوی ہیں۔

مثال (۲) اگر ما = ک جم (لوک لا) + ل جب (لوک لا) تو بتاؤ کہ

$$0 = 1 + \frac{فرما}{فرلا} + لا \frac{فرما^2}{فرلا^2}$$

ما کو بلحاظ لا تفریق کرنے سے

$$لا \frac{فرما}{فرلا} = ک جب (لوک لا) + ل جم (لوک لا)$$

$$\begin{aligned} \text{مکرر تفرق سے } \frac{لا^۲ فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} &= \frac{ک جم (لوک لا)}{لا} - \frac{ل جب (لوک لا)}{لا} \\ \therefore لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} + ک جم (لوک لا) + ل جب (لوک لا) &= \\ \text{یعنی } لا^۲ \frac{فرما}{فرلا} + لا \frac{فرما}{فرلا} + ما &= ۰ \end{aligned}$$

۹۔ لائبنٹس (Leibniz) کا مسئلہ —

لا کے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا ن۔ واں تفرقی سرریافت کرنے کے لیے لائبنٹس کا مندرجہ ذیل مسئلہ استعمال کیا جاتا ہے :

فرض کرو $و$ اور $ا$ ، لا کے دو تفاعل ہیں اور $ما = و و تب$

$$\begin{aligned} \frac{فرا ا}{فرا ل ا} &= \frac{فرا (و و)}{فرا ل ا} = \frac{فرا و}{فرا ل ا} + و \frac{فرا ا}{فرا ل ا} \\ &= \frac{فرا و}{فرا ل ا} + و \frac{فرا ا}{فرا ل ا} + \dots + و \frac{فرا ا}{فرا ل ا} \end{aligned}$$

بنظر سہولت $\frac{فرا ا}{فرا ل ا}$ اور $\frac{فرا و}{فرا ل ا}$ کے لیے علی الترتیب $ا$ ، $و$ اور $و$ لکھو

اس طرح $ا$ ، $و$ اور $و$ کے دوسرے تفرقی سرروں کو علی الترتیب $ا$ ، $و$ اور $و$ سے تعبیر کرو اور اسی طریقہ ترقیم کے بموجب ان کے $ن$ ۔ دیں تفرقی سرروں کو $ا$ ، $و$ اور $و$ سے تعبیر کرو۔

ما کو بلحاظ لایبل مرتبہ تفرق کرنے سے $ما = و و + و و$

دوسرے مرتبہ تفرق کرنے سے $ما = و و + و و + و و + و و + و و + و و$

تیسرے مرتبہ تفرق کرنے سے $ما = و و + و و + و و + و و + و و + و و + و و + و و$

$$= و و + و و + و و + و و + و و + و و + و و + و و + و و + و و$$

جس سے ظاہر ہے کہ بلحاظ مندرجہ بالا کی رقیس (لو + ب) کے پھیلاؤ کی رقیوں کے

اس لیے $\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n (فرلا) = \left\{ \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \dots \right\} = \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \dots$
 جو شکل ذیل لکھا جاسکتا ہے :

$$\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n (فرلا) = \left\{ \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \dots \right\} = \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \frac{فر}{فرلا} + \dots$$

یا $\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n (فرلا) = \left(1 + \frac{فر}{فرلا}\right)^n$ جس میں فرن کیا جاتا ہے کہ علامتی جملہ $\left(1 + \frac{فر}{فرلا}\right)^n$ مسئلہ شنائی کے ذریعے پھیلا یا جاسکتا ہے اور حاصل شدہ پھیلاؤ میں

$$\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^0, \left(\frac{فر}{فرلا}\right)^1, \left(\frac{فر}{فرلا}\right)^2, \dots, \left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n$$

فر^۰، فر^۱، فر^۲، فر^ن لکھے جاتے ہیں۔

۱۱۔ عام طور پر اگر نہ (لا) کسی بھی جملہ کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا کی صرف مثبت صحیحہ قوتیں شامل ہیں تو

$$\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n (فرلا) = \left(1 + \frac{فر}{فرلا}\right)^n$$

اس لیے کہ فرض کرو $\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n$ کو پھیلانے سے اس کی شکل

۱. $\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^n + \left(\frac{فر}{فرلا}\right)^{n-1} + \dots + 1$ ان ہوتی ہے۔
 تب مسئلہ کا ضابطہ مندرجہ بالا جملہ کی ہر ایک رقم پر مادی ہوتا ہے اور اس لیے ان تمام رقموں کے مجموعہ پر بھی - پس

$$نہ \left(\frac{فر}{لا} \right) = \frac{فر}{لا} ، = \frac{فر}{لا} (1 + \frac{فر}{لا})$$

اس نتیجہ کو مندرجہ ذیل شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جو متعلق سہوں والی تفریق مساواتوں کے حل کرنے میں بہت اہمیت رکھتی ہے۔

$$نہ \left(\frac{فر}{لا} \right) = \frac{فر}{لا} (1 + \frac{فر}{لا})$$

۱۲ اگر ما = جب ا تو ثابت کرو کہ

$$(1 - لا) \frac{فر^{۲۰}}{لا^{۲۰} + ۱} - (1 + ن^۲) \frac{فر^{۱۰}}{لا^{۱۰} + ۱} - ن^۲ \frac{فر}{لا} = ۰$$

$$\text{یہاں } \frac{فر}{لا} = \frac{1}{لا - ۱} \text{ یعنی } (1 - لا)^{\frac{۱}{۲}} \frac{فر}{لا} = ۱$$

$$\text{پس عمل تفریق سے } (1 - لا)^{\frac{۱}{۲}} \frac{فر}{لا} - \frac{1}{لا^{۲۰} - ۱} - لا \frac{فر}{لا} = ۰$$

لا بٹنٹس کے سسٹے سے

$$\left(\frac{فر}{لا} \right)^ن (1 - لا) \frac{فر}{لا} = \frac{فر^{۲۰}}{لا^{۲۰} + ۱} - ن^۲ \frac{فر^{۱۰}}{لا^{۱۰} + ۱} - ن^۲ \frac{فر}{لا} (1 - ن)$$

(اس لیے کہ (1 - لا) کے تیسرے اہد اس کے بعد کو آنے والے تفریق سر صفر ہیں) -

$$\text{مجھذا } \left(\frac{فر}{لا} \right)^ن (لا \frac{فر}{لا}) = \frac{فر^{۲۰}}{لا^{۲۰} + ۱} + ن^۲ \frac{فر}{لا}$$

اس آخری جملہ کو اس سے پہلے کے جملہ میں سے وضع کرنے سے مساوات کے عیدے

$$\text{بانب کی مقدار صفر ہوتی ہے اس لیے } (1 - لا) \frac{فر}{لا} - لا \frac{فر}{لا} = ۰ \text{ پس}$$

$$= (1 - لا) \frac{فر^{۲۰}}{لا^{۲۰} + ۱} - (1 + ن^۲) \frac{فر^{۱۰}}{لا^{۱۰} + ۱} - ن^۲ \frac{فر}{لا} = ۰$$

$$(۲) ۱ = لا لاک لا ثابیت کر کے $\frac{فن م}{فر لاک} = (۱ - ۱) \frac{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (ن - ۱)}{۱ - ۱}$$$

$$(۳) ۱ = لاک = \sqrt{\frac{۲ لا + ۳ لا + ۱}{۲ لا + ۳ لا - ۱}} + مس \frac{۱}{۲ لا - ۱}$$

$$\text{بتناؤ کہ } \frac{فن م}{فر لا} = - \frac{۲ لا}{۲(۳ لا + ۱)}$$

$$(۴) ۱ = لا جب لا ثابیت کر کے $\frac{فن م}{فر لاک} = \frac{لا جب (لا + ن ف)}{جب ن ف}$$$

$$\text{جس میں } ف = مس \frac{۱}{۲}$$

$$(۵) ۱ = لا جب لا تو $(۱ - لا) \frac{فن م}{فر لا} - لا \frac{فن م}{فر لا} = لا$$$

$$(۶) ۱ = جب (جب لا) تو $\frac{فن م}{فر لا} + \frac{فن م}{فر لا} مس لا + ما جم لا = ۰$$$

$$(۷) اگر ۱ = \frac{۱}{۲ لا + ۲} تو ثابت کر کے $\frac{فن م}{فر لاک}$$$

$$= (۱ - ۱) \frac{لا جب ۱ + ف جب (ن + ۱) ف}{۲ + ۱}$$

$$\text{جس میں } مس ف = \frac{۱}{۲}$$

[اشارہ - یہ نتیجہ مک کی مدد سے فوراً مستنبط ہوتا ہے اس لیے کہ

$$\left(\frac{فن م}{فر لا} \right) (مس \frac{۱}{۲}) = \frac{۱ - ۱}{۲ لا + ۲}$$

(۸) اس طرح ثابت کر کے

$$\text{اگر } ۱ = \frac{لا}{۲ لا + ۲} تو \frac{فن م}{فر لاک} = (۱ - ۱) \frac{لا جب ۱ + ف جب (ن + ۱) ف}{۲ + ۱}$$

$$(۹) \text{ اگر } x = لا \text{ مآ تو بتاؤ کہ } \frac{x^n}{x^n} = لا \frac{x^n}{x^n} + n \frac{x^{n-1}}{x^n}$$

$$(۱۰) \text{ اگر } x = (جب لا) \text{ تو } (۱ - لا) \frac{x^2}{x^2} - لا \frac{x^2}{x^2} = ۲$$

اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ

$$(۱ - لا) \frac{x^{n+2}}{x^{n+2}} - \frac{x^{n+1}}{x^{n+1}} (۱ + n) - \frac{x^n}{x^n} n = ۰$$

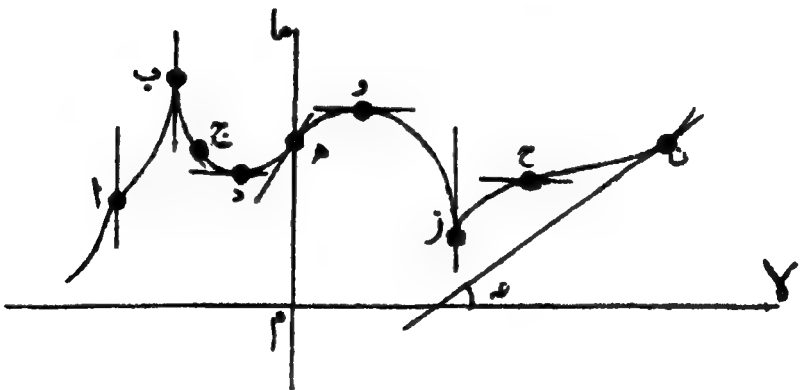
$$\text{اور } \left(\frac{x^n}{x^n} \right) n = \left(\frac{x^{n+2}}{x^{n+2}} \right)$$

[اشارہ - دیکھو ۱۲]

چھٹا باب

تفرقی سر (یا مشتق) کے استعمال سے متعلق چند ہندی و دیگر مثالیں

۱۔ منحنی کی سمت — اگر کسی منحنی کی مساوات $y = f(x)$ ہے
 تو فیصلہ ازیں بتایا گیا ہے کہ $f'(x) = 0$ یا $f'(x) < 0$ یا $f'(x) > 0$ کے نقطہ (یا) x پر کے
 خط مماس کا ڈھلان ہے۔ (۱) شکل ۱۲۔



شکل ۱۲۔

اگر خطِ ماس محور λ کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے تو $\frac{فر}{لا} = مس \theta$
اور منحنی کے کسی نقطہ پر اس کی سمت سے مراد منحنی کے اس نقطہ پر کے خطِ ماس

کی سمت ہے یعنی $\frac{فر}{لا} = مس \theta =$ منحنی کے کسی نقطہ (لا) پر اس منحنی کا ڈھلان

د، و، ح جیسے نقطوں پر جہاں منحنی کی سمت محور λ کے متوازی ہے اور خطِ ماس
افقی

زاویہ $\theta = 0$ پس $\frac{فر}{لا} = 0$

۱، ب، ز جیسے نقطوں پر جہاں منحنی کی سمت محور λ کے علی التوا قائم ہے اور خطِ ماس
انتصابی

زاویہ $\theta = 90^\circ$ پس $\frac{فر}{لا}$ کی قیمت نامتناہی ہو جاتی ہے۔

توضیحی مثالیں (۱) منحنی $1 = \frac{لا^2}{۲} - لا + ۲$ کو مرتسم کرو اور

بتاؤ کہ

(۱) θ کی قیمت 90° ہے جبکہ $لا = 1$

(ب) منحنی کے نقطوں (لا = 0، 1، 2) اور (لا = 2، 1، 0) پر
خطِ ماس افقی ہے۔

(ج) منحنی کا ڈھلان اکائی ہے جہاں $لا = 1 \pm 1$

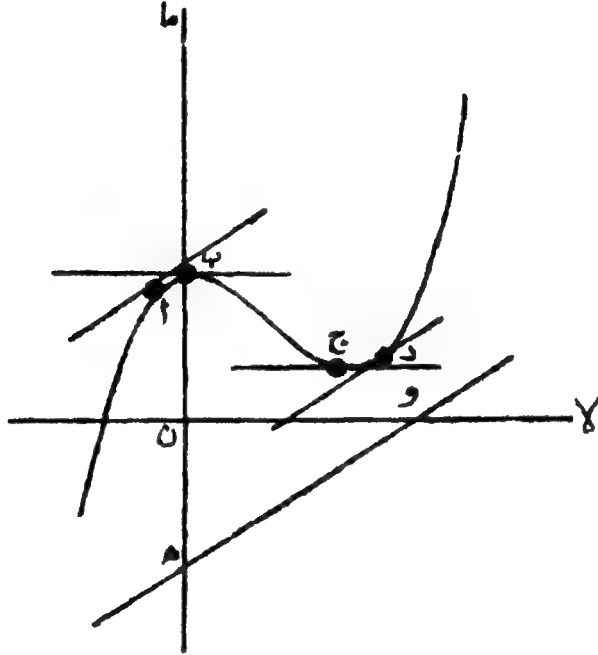
(د) منحنی کی سمت خطِ مستقیم $لا = ۲ - لا = ۱$ کے متوازی ہے جہاں

$$لا = 1 \pm \frac{۱}{۲}$$

حل۔ شکل ۱۱۱ میں دیے ہوئے منحنی اور خطِ مستقیم کی ترسیمیں کھینچی
گئی ہیں۔

$$1 = \frac{لا^2}{۲} - لا + ۲ \text{ کو تفرق کرنے سے}$$

$$\frac{فر}{لا} = لا^۲ - لا = مس$$



شکل ۱۳

(ا) جہاں لا = ۱ وہاں مس = ۱ - ۱ = ۰

لہذا = ۱۳۵

(ب) $\frac{فر}{لا} = مس = ۰$ جبکہ = ۰

پس لا = ۲ - لا = ۰ یعنی لا (۲ - لا) = ۰

پس لا = ۰ یا لا = ۲ - یعنی لا = ۲

لا کی جب یہ قیمتیں معنی کی مساوات ($ما = \frac{لا^۲}{۲} - لا + ۱$) میں تعویض کی جاتی ہیں تو ما کی قیمت ۲ حاصل ہوتی ہے جبکہ لا = ۰ اور $\frac{۲}{۲} = ۱$ جبکہ لا = ۲ لہذا خط ما س معنی کے نقطوں ب (یعنی ۲، ۰) اور ج (یعنی ۲، ۲) پر اُضقی ہوتا ہے۔

(ج) جبکہ $e = ۵۴$ مس $e = ۱$: لا - $۱۲ = ۱$ اس مساوات کو حل کرنے سے لا کی قیمت ۱ ± ۲ حاصل ہوتی ہے۔ پس اس طرح ان نقطوں کی تعین ہو جاتی ہے جہاں منحنی کا ڈھلان اکائی ہے۔

(د) چونکہ دیے ہوئے خط کی مساوات $۱۲ - ۱ = ۱۲ = ۲$ لہذا $۱۲ - ۸ = ۴$ یعنی $۱ = ۲$ پس خط مستقیم کا ڈھلان $\frac{۲}{۱}$ ہے۔ منحنی کا یہ ڈھلان ہونے کے لیے مس $e = \frac{۲}{۱}$ یعنی لا - $۱۲ = ۲$ اس مساوات کو حل کرنے سے لا کی قیمت ۱ ± ۲ برآء ہوتی ہے۔

پس منحنی کی سمت دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی ان نقطوں پر ہوتی ہے جہاں لا کی قیمت $۱ + \frac{۲}{۱}$ یعنی ۳ یا $۱ - \frac{۲}{۱}$ یعنی -۱ ہوتی ہے۔

شکل میں یہ نقطہ ۱ اور ۲ بتائے گئے ہیں۔

چونکہ کسی نقطہ پر منحنی کی سمت دی ہوئی ہے جو اس نقطہ پر کے خط مماس کی سمت ہوتی ہے۔ دو منحنیوں کا درمیانی زاویہ ان کے مشترک نقطہ پر ان کے اس نقطہ پر کے مماسی خطوں کا درمیانی زاویہ ہے۔

توضیحی مثال (۲) - مندرجہ ذیل دائروں کی ترسیں کھینچو اور

ان کا زاویہ تقاطع دریافت کرو :-

$$(۱) \quad لا + لا' = ۱۲ - ۱ = ۱$$

$$(ب) \quad لا + لا' = ۱۲ - ۹ = ۳$$

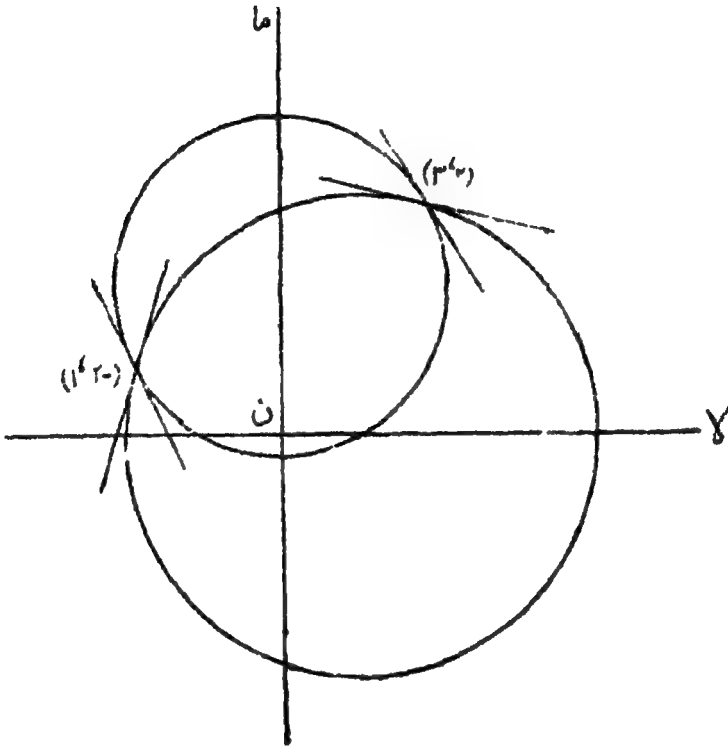
حل - لا کی ان دو ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے تقاطع کے محدد (لا = ۱۲، لا' = ۳) اور (لا = ۱۲، لا' = ۱) برآء ہوتے ہیں

دیکھو شکل ۱۱۱ -

فرق کرو کہ مم دائرہ (۱) کے نقطہ (لا، لا') پر کے خط مماس کا ڈھلان ہے۔

اور مم (ب) (ب)

تب (۱) کے لیے $\frac{لا}{۶-۲} = \frac{فرما}{۳} = م$
 اور (ب) $\frac{لا-۱}{۶} = \frac{فرما}{۳} = م$



شکل ۱۳

نقطہ تقاطع (۳'۲) پر کے خطِ مماس کے لیے

$$۲- = \frac{۲}{۳-۲} = م$$

$$\frac{۱}{۳} - = \frac{۲-۱}{۳} = م \quad \text{اور}$$

پس ان مماسی خطوں کے درمیانی زاویہ طہ کے لیے

$$\frac{\frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \text{مس ط}$$

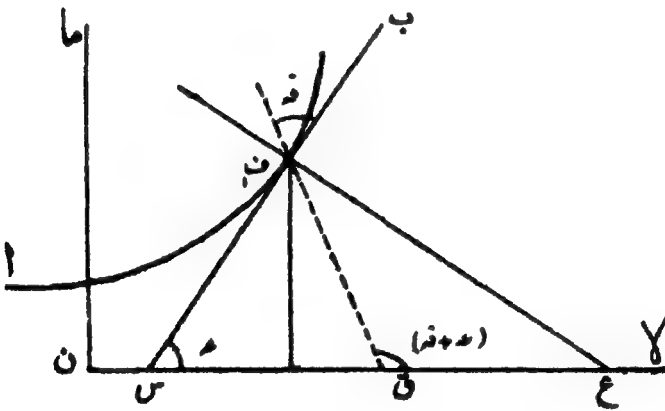
$$1 - \text{پس ط} = 135$$

اسی طرح انتہائی تقاطع (۱، ۲) پر کے خطوط مماس کا وسطانی زاویہ ۱۳۵ یا ۲۲۵ برآمد ہوتا ہے۔

۲۔ خط مماس اور عماد کی مساواتیں - ایسے خط مستقیم کی

مساوات جو نقطہ لا، ما میں سے گزرتا ہے اور جس کا ڈھلان م ہے۔

(۱ - ما) = م (لا - لا) ہے
اگر یہ خط منحنی اب کو نقطہ ف، پر سر کرتا ہے (یعنی ف پر کا خط مماس ہے)



شکل ۱۵

اور ف کے محدود لا، ما ہیں تو م اس نقطہ پر منحنی کا ڈھلان ہے۔ م کی اس خاص قیمت کو م سے تعبیر کرو۔ پس نقطہ مماس ف، (لا، ما) پر منحنی کے خط مماس سے اف کی مساوات

۱۔ ۱ = ۱ (۱ - ۱) ہے (۱)
چونکہ عماد خط مماس کے علی القوائم ہوتا ہے اس کا ڈیٹان م کا منفی متکافی ہے۔ اور
چونکہ وہ نقطہ مماس ف (۱، ۱) میں سے گزرتا ہے اس لیے عماد ف ع کی مساوات

$$۱ - ۱ = ۱ (۱ - ۱) \text{ ہے } \dots \dots \dots (۲)$$

خط مماس کا وہ حصہ جو نقطہ مماس اور محور ن لا کے مابین منقطع ہے۔ (یعنی س ف)
خط مماس کا طول کہلاتا ہے۔ اور اس کا طول محور لا پر (یعنی س د) زیر مماس کا طول
کہلاتا ہے۔ اس طرح ف ع عماد کا طول ہے۔ اور د ع زیر عماد کا طول ہے۔

$$\text{ثلث س ف د میں س ع} = م = ۱ = \frac{\text{د ف}}{\text{س د}}$$

$$\text{د س د} = \frac{\text{د ف}}{م} = \text{زیر مماس کا طول} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{ثلث د ف ع میں س ع} = م = ۱ = \frac{\text{د ع}}{\text{د ف}}$$

$$\text{د د ع} = م (د ف) = م ۱ = \text{زیر عماد کا طول} \dots \dots \dots (۴)$$

[واضح ہو کہ زیر مماس م کے سیدھے جانب واقع ہے تو مثبت سمجھا جاتا ہے اور اگر بائیں جانب
ہو تو منفی۔ اسی طرح اگر زیر عماد د کے سیدھے جانب واقع ہو تو مثبت سمجھا جاتا ہے اور اگر عماد کے
بائیں جانب ہو تو منفی۔]

ان کی مدد سے خط مماس س ف اور عماد ف ع کا طول فوراً معلوم کر لیا جاسکتا ہے۔
کیونکہ یہ معلوم بازوؤں والے قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر ہیں۔ (دیکھو شکل ۱۵)۔
جب کسی منحنی پر کے نقطہ کے زیر مماس و زیر عماد کا طول معلوم ہو جاتا ہے تو
اس کا خط مماس اور عماد آسانی تیار کر لیا جاسکتا ہے۔

۲۔ ایسے خط کی مساوات جو کسی منحنی کو دیے ہوئے

زاویہ پر قطع کرے۔ خط ف ق کی مساوات مطلوب ہے جو منحنی کو نقطہ لا ۱، ۱
پر منقطع کرے اور اس کے ساتھ زاویہ ف د بنائے۔ دیکھو شکل ۱۶۔

منحنی کی مساوات $MA = F(لا) فرض کرو۔ F(لا) یعنی $\frac{F(لا)}{لا} = M$ ہو کہ خط MA کا ڈھلان e ہے اس لیے خط زیر بحث کا ڈھلان $(e + \frac{1}{لا})$ ہے$

$$پس M = مس (e + \frac{1}{لا}) = \frac{مس e + مس}{1 - مس e}$$

$$= \frac{M + مس}{1 - مس M}$$

لہذا خط مذکور کی مساوات

$$MA - M = \frac{M + مس}{1 - مس M} (لا - لا)$$

مثالیں

(۱) مصرعہ بالا تعریف کے بموجب بتاؤ کہ خط MA کا طول $\frac{1}{M} + (M)$ ہے۔

(۲) عمار کا طول $MA + (M)$ ہے۔

(۳) منحنی $MA = ۳ لا + M$ کے نقطہ $(1, ۷)$ پر ثابت کرو کہ خط MA کی

مساوات $MA - لا = ۱$ ہے اور عمار کی مساوات $لا + لا = ۳۳$ ہے۔

(۴) بتاؤ کہ منحنی $MA - لا = ۱$ کو نقطہ $۹, ۶$ پر ۴۵° زاویہ پر قطع کرنے والے

خط مستقیم کی مساوات $لا - لا = ۱۲$ ہے۔

(۵) خط ناقص $\frac{لا}{۹} + \frac{لا}{۲} = ۱$ کے پہلے ربعی حصہ میں نقطہ $لا = ۱$

پر زیر MA کا طول ۳ اور زیر عمار کا طول $\frac{۹}{۲}$ ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ دائرہ $لا + لا = M$ کے نقطہ $لا, ۱$ پر خط MA کی

مساوات $لا\ لا + ما\ ما = ص\ ص$ ہے اور عماد کی مساوات $لا\ ما - ما\ لا = .$

(۷) خط زائد $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ا$ کے نقطہ $لا$ ، $ما$ پر خطِ عماس کی

مساوات $\frac{لا\ لا}{۱} - \frac{ما\ ما}{۲} = ا$ ہے اور عماد کی مساوات

$$\frac{لا\ ما}{۱} + \frac{ما\ لا}{۲} = لا\ لا، (ا + \frac{۱}{۲}) ہے۔$$

(۸) بتاؤ کہ خطِ مکانی کا $ما = ۲$ لا کے زیرِ عماد کا طول $ا$ ہے اور اس خطِ مذکور کے ہر نقطہ کے لیے مستقل ہے۔ نیز یہ بھی بتاؤ کہ اس کا زیرِ عماس $ما$ اس پر اس کی تنصیف کرتا ہے۔

(۹) منحنی $لا\ ما = ا$ کے خطوطِ عماس اور محوروں کے محوروں کے مابین جو مثلث

تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے اور $۲ = ا$

(۱۰) بتاؤ کہ $ما = ا$ کے زیرِ عماس کا طول $ا =$

(۱۱) زنجیرہ $ا = \frac{۱}{۴} (و\ و + و\ و)$ کے کسی بھی نقطہ پر کے عماد کا طول

مستقل اور $ا = \frac{۱}{۴}$ ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ (۱) درتدویر (hypocycloid) کے $\left\{ \begin{matrix} ا = و\ و \\ ا = و\ و \end{matrix} \right\}$ کے

ایسے نقطہ پر جہاں $ط = ط$ خطِ عماس کی مساوات

$ا - ا\ جب\ ط = - مس\ ط (لا - جم\ ط)$ ہے

اور عماد کی مساوات $ا - ا\ جب\ ط = مم\ ط (لا - جم\ ط)$ ہے

اور (ب) اس خطِ عماس کے قطع کا جو $لا$ و $ما$ کے محوروں سے منقطع ہے طول $ا$ ہے۔

(۱۳) منحنی لوک $(لا + ما) = مس\ ا$ کے ساتھ خطِ مستقیم $ما = م\ لا$

جو زاویہ بناتا ہے مستقل اور $ا = \frac{\pi}{۴}$ ہے۔

(۱۴) لبلابی سٹائیڈ (Cissoid)

$$\frac{لا^۳}{لا - ۱۲} = ۲$$

کی ترسیم کیجیو۔ اور بتاؤ کہ (۱) اس کے نقطہ (۱، ۱) پر کے خطِ عماد کی مساوات
 $۲ = لا - ۱۲$ ہے اور عماد کی مساوات $۲ = لا + ۱۲$ ہے۔

اور (ب) اس کے زیرِ عماد کا طول $\frac{۱}{۲}$ ہے اور زیرِ عماد کا طول $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

نیز (ج) اس کے خطِ عماد کا طول $\frac{۱}{۲}$ ہے اور عماد کا طول $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

(۵) دائرہ $لا + لا^۲ = ۸$ اور لبلابی (Cissoid) $لا^۳ = لا - ۱۲$ ۔

(۱) مبدا پر باہم دیگر علی التوازم ہیں۔

(ب) دوسرے دو نقطوں پر ایک دوسرے کو ہم زاویہ پر منقطع کرتے ہیں۔

۳۔ واحد متغیر کے تفاعلوں کی اعظم و اقل قیمتوں پر

تہیہ دی بحث۔ خالص اور اطلاقی ریاضیات جن میں کئی استقامتوں میں
 ایسے تغیر پذیر متغیر سے سابقہ پڑتا ہے جو ان سے عین پہلے اور عین بعد کو آنے والے
 متغیر سے زائد (یا کمتر) قیمت کے ہوتے ہیں۔ یہاں ہم مسلسل تفاعلوں کی ان اعظم
 اور اقل قیمتوں کی تعیین کے مسائل پر بحث کریں گے۔

تعریفات۔ (۱) اگر ف (لا) کا بڑھنا ختم ہو جاتا ہے اور گھٹنا شروع

ہوتا ہے جبکہ لا' لا میں سے گزرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا = لا پر ف (لا) کا ایک
 اعظم ہے۔ اور اس کی قیمت ف (لا) ہے۔

(۲) اگر ف (لا) کا گھٹنا ختم ہو جاتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے جیسے کہ

لا' لا میں سے گزرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا = لا پر ف (لا) کا ایک اقل ہے۔ اور
 اس کی قیمت ف (لا) ہے۔

[یہاں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ کسی تفاعل کی ایک اعظم (یا ایک اقل) قیمت لازماً سب سے
 بڑی (یا سب سے چھوٹی) قیمت ہوتی ہے۔ وہ صرف ایک محیثہ وقوع کے اندر کی سب سے

بڑی (یا سب سے چھوٹی) قیمت ہے۔]

اعظم کے لیے شرائط۔ کسی تفاعل کا لا = لا پر بڑھا ختم ہو جاتا ہے

اور گھٹنا شروع ہوتا ہے (یا بالفاظ دیگر اس تفاعل کا لا = لا پر ایک اعظم ہوتا ہے) اگر مشتق ف (لا) یعنی ف (لا) کا تفرقی سرے لا سے عین پہلے کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہے۔ اور اس سے عین بعد کی تمام قیمتوں کے لیے منفی ہے۔

اقل کے لیے شرائط۔ کسی تفاعل کا لا = لا پر گھٹنا ختم ہو جاتا ہے اور

بڑھنا شروع ہوتا ہے (یا بالفاظ دیگر اس تفاعل کا لا = لا پر ایک اقل ہوتا ہے) اگر مشتق ف (لا) یعنی ف (لا) کا تفرقی سرے لا سے عین پہلے کی تمام قیمتوں کے لیے منفی ہے۔ اور اس سے عین بعد کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہے۔

واضح ہو کہ مصرعہ بالا شرائط واقعات ذیل کے نتائج ہیں جن کو ہم یہاں ثبوت کا محتاج نہیں سمجھتے۔

(۱) لا کے بڑھنے سے ف (لا) بڑھتا ہے اگر ف (لا) مثبت ہے۔

(۲) لا کے بڑھنے سے ف (لا) گھٹتا ہے اگر ف (لا) منفی ہے۔

تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں کے پاس تفرقی سرے

یا مشتق کی کیفیت۔ کسی تفاعل کے مشتق پر غور کر کے اس تفاعل کی اعظم و اقل قیمتوں کے مقام دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ شکل ۱۱ کے ملاحظہ سے مندرجہ ذیل امور کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

(۱) مسلسل مشتق والے تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں صرف ایسے

نقطوں پر پائی جاتی ہیں جہاں یہ مشتق (یعنی تفاعل کے معنی کا اوجھلان) صفر ہوتا ہے۔ ملاحظہ ہو نقطے 'ا' 'ب' 'ج' 'د' 'ه' 'و'۔

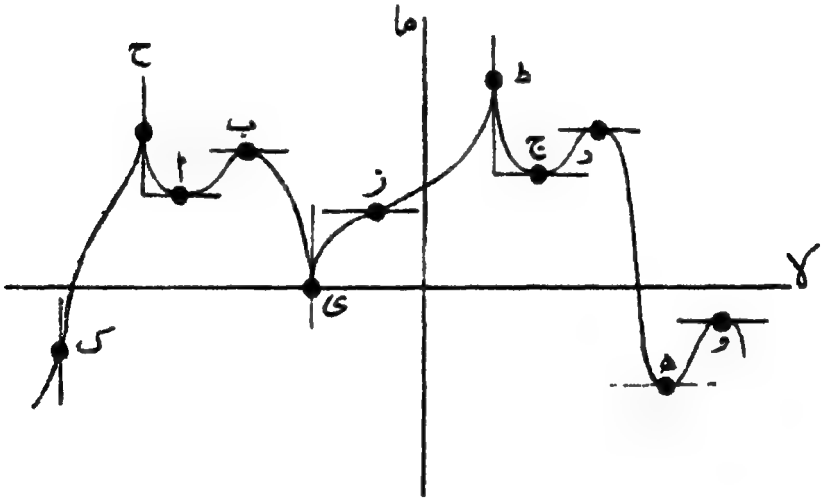
(۲) اعظم قیمتیں صرف اس صورت میں رونما ہوتی ہیں جبکہ لا کے بڑھنے سے

تفاعل کے مشتق کی علامت بدلتی ہے اور بالترتیب +، ۰، - ہوتا ہے۔

جیسے ب، د اور و پر۔

(۳) اقل قیمتیں صرف ایسے نقطوں یا موقعوں پر پائی جاتی ہیں جہاں لا کے بڑھنے سے مشتق کی علامت تبدیل ہوتی ہے اور وہ بالترتیب - ، ۰ ، + ہوتا ہے۔ جیسے 'ج' ۵ پر۔

(۴) مشتق ایسے نقطوں پر بھی صفر ہوتا ہے جہاں نہ تو اعظم قیمتیں ہوتی ہیں اور نہ اقل قیمتیں۔ جیسے 'ز' پر۔ ان نقطوں پر مشتق کی علامت نہیں بدلتی۔



شکل ۱۶۔

اطلاقی ریاضیات میں کسی تفاعل کے اعظم و اقل میں عموماً مشتق کی تبدیلی علامت پر غور کیے بغیر امتیاز کیا جاسکتا ہے۔ سوال کی نوعیت ہی سے عام طور پر اس امر کا آسانی تصفیہ ہو جاتا ہے۔

ف (لا) کے اعظم و اقل دریافت کرنے کا طریقہ عمل۔

(۱) ف (لا) کو لحاظ لا تفرق کر کے اس کا مشتق ف (لا) معلوم کیا جائے۔

(۲) ف (لا) کو صفر کے مساوی لکھ کر اس مساوات کو حل کر کے اس کی حقیقی اصلیں لا، لا، لا، لا، دریافت کی جائیں۔

(۳) اگر ممکن ہو تو مطالعہ ہی سے معلوم کیا جائے آیا لا، لام، لاء... سے
اعظم یا اقل قیمتیں مل جاتی ہیں۔ ورنہ

(1) ف (لا) میں لا کی بجائے (لا، + ہ) لکھا جائے جس میں ہ کافی چھوٹی مقدار ہے۔

تب لا پر ایک عظم ہوگا اگر
یا ایک اقل ہوگا

توضیحی مثال (۱) ف(لا) = لا + لا_۵ - لا_۷ - لا_{۲۰} - لا_{۲۰} + لا_{۱۵}
 کا اس کی اعظم و اقل قیمتوں کے لحاظ سے امتحان کرو۔

حل ف (لا) کو تفریق کرنے سے

ف (۱) = ۵ + ۱۰ - ۱۵ - ۲۰ + ۲۰ - ۲۵ + ۳۰ - ۳۵ + ۴۰ - ۴۵ + ۵۰ - ۵۵ + ۶۰ - ۶۵ + ۷۰ - ۷۵ + ۸۰ - ۸۵ + ۹۰ - ۹۵ + ۱۰۰ - ۱۰۵ + ۱۱۰ - ۱۱۵ + ۱۲۰ - ۱۲۵ + ۱۳۰ - ۱۳۵ + ۱۴۰ - ۱۴۵ + ۱۵۰ - ۱۵۵ + ۱۶۰ - ۱۶۵ + ۱۷۰ - ۱۷۵ + ۱۸۰ - ۱۸۵ + ۱۹۰ - ۱۹۵ + ۲۰۰ - ۲۰۵ + ۲۱۰ - ۲۱۵ + ۲۲۰ - ۲۲۵ + ۲۳۰ - ۲۳۵ + ۲۴۰ - ۲۴۵ + ۲۵۰ - ۲۵۵ + ۲۶۰ - ۲۶۵ + ۲۷۰ - ۲۷۵ + ۲۸۰ - ۲۸۵ + ۲۹۰ - ۲۹۵ + ۳۰۰ - ۳۰۵ + ۳۱۰ - ۳۱۵ + ۳۲۰ - ۳۲۵ + ۳۳۰ - ۳۳۵ + ۳۴۰ - ۳۴۵ + ۳۵۰ - ۳۵۵ + ۳۶۰ - ۳۶۵ + ۳۷۰ - ۳۷۵ + ۳۸۰ - ۳۸۵ + ۳۹۰ - ۳۹۵ + ۴۰۰ - ۴۰۵ + ۴۱۰ - ۴۱۵ + ۴۲۰ - ۴۲۵ + ۴۳۰ - ۴۳۵ + ۴۴۰ - ۴۴۵ + ۴۵۰ - ۴۵۵ + ۴۶۰ - ۴۶۵ + ۴۷۰ - ۴۷۵ + ۴۸۰ - ۴۸۵ + ۴۹۰ - ۴۹۵ + ۵۰۰ - ۵۰۵ + ۵۱۰ - ۵۱۵ + ۵۲۰ - ۵۲۵ + ۵۳۰ - ۵۳۵ + ۵۴۰ - ۵۴۵ + ۵۵۰ - ۵۵۵ + ۵۶۰ - ۵۶۵ + ۵۷۰ - ۵۷۵ + ۵۸۰ - ۵۸۵ + ۵۹۰ - ۵۹۵ + ۶۰۰ - ۶۰۵ + ۶۱۰ - ۶۱۵ + ۶۲۰ - ۶۲۵ + ۶۳۰ - ۶۳۵ + ۶۴۰ - ۶۴۵ + ۶۵۰ - ۶۵۵ + ۶۶۰ - ۶۶۵ + ۶۷۰ - ۶۷۵ + ۶۸۰ - ۶۸۵ + ۶۹۰ - ۶۹۵ + ۷۰۰ - ۷۰۵ + ۷۱۰ - ۷۱۵ + ۷۲۰ - ۷۲۵ + ۷۳۰ - ۷۳۵ + ۷۴۰ - ۷۴۵ + ۷۵۰ - ۷۵۵ + ۷۶۰ - ۷۶۵ + ۷۷۰ - ۷۷۵ + ۷۸۰ - ۷۸۵ + ۷۹۰ - ۷۹۵ + ۸۰۰ - ۸۰۵ + ۸۱۰ - ۸۱۵ + ۸۲۰ - ۸۲۵ + ۸۳۰ - ۸۳۵ + ۸۴۰ - ۸۴۵ + ۸۵۰ - ۸۵۵ + ۸۶۰ - ۸۶۵ + ۸۷۰ - ۸۷۵ + ۸۸۰ - ۸۸۵ + ۸۹۰ - ۸۹۵ + ۹۰۰ - ۹۰۵ + ۹۱۰ - ۹۱۵ + ۹۲۰ - ۹۲۵ + ۹۳۰ - ۹۳۵ + ۹۴۰ - ۹۴۵ + ۹۵۰ - ۹۵۵ + ۹۶۰ - ۹۶۵ + ۹۷۰ - ۹۷۵ + ۹۸۰ - ۹۸۵ + ۹۹۰ - ۹۹۵ + ۱۰۰۰ - ۱۰۰۵ + ۱۰۱۰ - ۱۰۱۵ + ۱۰۲۰ - ۱۰۲۵ + ۱۰۳۰ - ۱۰۳۵ + ۱۰۴۰ - ۱۰۴۵ + ۱۰۵۰ - ۱۰۵۵ + ۱۰۶۰ - ۱۰۶۵ + ۱۰۷۰ - ۱۰۷۵ + ۱۰۸۰ - ۱۰۸۵ + ۱۰۹۰ - ۱۰۹۵ + ۱۱۰۰ - ۱۱۰۵ + ۱۱۱۰ - ۱۱۱۵ + ۱۱۲۰ - ۱۱۲۵ + ۱۱۳۰ - ۱۱۳۵ + ۱۱۴۰ - ۱۱۴۵ + ۱۱۵۰ - ۱۱۵۵ + ۱۱۶۰ - ۱۱۶۵ + ۱۱۷۰ - ۱۱۷۵ + ۱۱۸۰ - ۱۱۸۵ + ۱۱۹۰ - ۱۱۹۵ + ۱۲۰۰ - ۱۲۰۵ + ۱۲۱۰ - ۱۲۱۵ + ۱۲۲۰ - ۱۲۲۵ + ۱۲۳۰ - ۱۲۳۵ + ۱۲۴۰ - ۱۲۴۵ + ۱۲۵۰ - ۱۲۵۵ + ۱۲۶۰ - ۱۲۶۵ + ۱۲۷۰ - ۱۲۷۵ + ۱۲۸۰ - ۱۲۸۵ + ۱۲۹۰ - ۱۲۹۵ + ۱۳۰۰ - ۱۳۰۵ + ۱۳۱۰ - ۱۳۱۵ + ۱۳۲۰ - ۱۳۲۵ + ۱۳۳۰ - ۱۳۳۵ + ۱۳۴۰ - ۱۳۴۵ + ۱۳۵۰ - ۱۳۵۵ + ۱۳۶۰ - ۱۳۶۵ + ۱۳۷۰ - ۱۳۷۵ + ۱۳۸۰ - ۱۳۸۵ + ۱۳۹۰ - ۱۳۹۵ + ۱۴۰۰ - ۱۴۰۵ + ۱۴۱۰ - ۱۴۱۵ + ۱۴۲۰ - ۱۴۲۵ + ۱۴۳۰ - ۱۴۳۵ + ۱۴۴۰ - ۱۴۴۵ + ۱۴۵۰ - ۱۴۵۵ + ۱۴۶۰ - ۱۴۶۵ + ۱۴۷۰ - ۱۴۷۵ + ۱۴۸۰ - ۱۴۸۵ + ۱۴۹۰ - ۱۴۹۵ + ۱۵۰۰ - ۱۵۰۵ + ۱۵۱۰ - ۱۵۱۵ + ۱۵۲۰ - ۱۵۲۵ + ۱۵۳۰ - ۱۵۳۵ + ۱۵۴۰ - ۱۵۴۵ + ۱۵۵۰ - ۱۵۵۵ + ۱۵۶۰ - ۱۵۶۵ + ۱۵۷۰ - ۱۵۷۵ + ۱۵۸۰ - ۱۵۸۵ + ۱۵۹۰ - ۱۵۹۵ + ۱۶۰۰ - ۱۶۰۵ + ۱۶۱۰ - ۱۶۱۵ + ۱۶۲۰ - ۱۶۲۵ + ۱۶۳۰ - ۱۶۳۵ + ۱۶۴۰ - ۱۶۴۵ + ۱۶۵۰ - ۱۶۵۵ + ۱۶۶۰ - ۱۶۶۵ + ۱۶۷۰ - ۱۶۷۵ + ۱۶۸۰ - ۱۶۸۵ + ۱۶۹۰ - ۱۶۹۵ + ۱۷۰۰ - ۱۷۰۵ + ۱۷۱۰ - ۱۷۱۵ + ۱۷۲۰ - ۱۷۲۵ + ۱۷۳۰ - ۱۷۳۵ + ۱۷۴۰ - ۱۷۴۵ + ۱۷۵۰ - ۱۷۵۵ + ۱۷۶۰ - ۱۷۶۵ + ۱۷۷۰ - ۱۷۷۵ + ۱۷۸۰ - ۱۷۸۵ + ۱۷۹۰ - ۱۷۹۵ + ۱۸۰۰ - ۱۸۰۵ + ۱۸۱۰ - ۱۸۱۵ + ۱۸۲۰ - ۱۸۲۵ + ۱۸۳۰ - ۱۸۳۵ + ۱۸۴۰ - ۱۸۴۵ + ۱۸۵۰ - ۱۸۵۵ + ۱۸۶۰ - ۱۸۶۵ + ۱۸۷۰ - ۱۸۷۵ + ۱۸۸۰ - ۱۸۸۵ + ۱۸۹۰ - ۱۸۹۵ + ۱۹۰۰ - ۱۹۰۵ + ۱۹۱۰ - ۱۹۱۵ + ۱۹۲۰ - ۱۹۲۵ + ۱۹۳۰ - ۱۹۳۵ + ۱۹۴۰ - ۱۹۴۵ + ۱۹۵۰ - ۱۹۵۵ + ۱۹۶۰ - ۱۹۶۵ + ۱۹۷۰ - ۱۹۷۵ + ۱۹۸۰ - ۱۹۸۵ + ۱۹۹۰ - ۱۹۹۵ + ۲۰۰۰ - ۲۰۰۵ + ۲۰۱۰ - ۲۰۱۵ + ۲۰۲۰ - ۲۰۲۵ + ۲۰۳۰ - ۲۰۳۵ + ۲۰۴۰ - ۲۰۴۵ + ۲۰۵۰ - ۲۰۵۵ + ۲۰۶۰ - ۲۰۶۵ + ۲۰۷۰ - ۲۰۷۵ + ۲۰۸۰ - ۲۰۸۵ + ۲۰۹۰ - ۲۰۹۵ + ۲۱۰۰ - ۲۱۰۵ + ۲۱۱۰ - ۲۱۱۵ + ۲۱۲۰ - ۲۱۲۵ + ۲۱۳۰ - ۲۱۳۵ + ۲۱۴۰ - ۲۱۴۵ + ۲۱۵۰ - ۲۱۵۵ + ۲۱۶۰ - ۲۱۶۵ + ۲۱۷۰ - ۲۱۷۵ + ۲۱۸۰ - ۲۱۸۵ + ۲۱۹۰ - ۲۱۹۵ + ۲۲۰۰ - ۲۲۰۵ + ۲۲۱۰ - ۲۲۱۵ + ۲۲۲۰ - ۲۲۲۵ + ۲۲۳۰ - ۲۲۳۵ + ۲۲۴۰ - ۲۲۴۵ + ۲۲۵۰ - ۲۲۵۵ + ۲۲۶۰ -

$\Delta = -2 + 1 - 1$ حاصل ہوتا ہے۔
 (۱) $\Delta = 2$ تو Δ کے جلد میں لا کے عوض $(-2 + 1)$ لکھنے سے
 (جس میں کافی چھری مقدار ہے) $\Delta = (-2 + 1) \Delta = (-1) \Delta$
 جب Δ منفی ہے تو $\Delta = (-2 + 1)$ مثبت ہے۔

جب ۵ مثبت ہے تو ف (۵+۲-) منفی ہے۔
 پس ف (لا) نقطہ لا = ۲- پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے اور وہ ۲۳+ ہے۔
 (ب) لا = ۲+ تو ف (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (۵+۲) لکھنے سے
 ف (۵+۲) = ۵ (۵+۲) (۵) (۵+۳) (۵+۳)^۲
 جب ۵ منفی ہے تو ف (۵+۲) منفی ہے۔
 جب ۵ مثبت ہے تو ف (۵+۲) مثبت ہے۔
 پس ف (لا) نقطہ لا = ۲+ پر ایک اقل قیمت رکھتا ہے اور وہ ۳- ہے
 (ج) لا = ۱- تو ف (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (۵+۱-) لکھنے سے
 ف (۵+۱-) = ۵ (۵+۱) (۵+۳-) (۵+۳)^۲
 جب ۵ منفی ہے تو ف (۵+۱-) منفی ہے
 جب ۵ مثبت ہے تو ف (۵+۱-) منفی ہے
 یعنی اس صورت میں ۵ منفی سے مثبت میں تبدیل ہونے پر ف (۵+۱-) کی
 علامت نہیں بدلتی وہ منفی ہی رہتا ہے۔ پس نقطہ لا = ۱- پر تفاعل کا نہ کوئی
 اعظم ہے اور نہ کوئی اقل۔

توضیحی مثال (۲) ف (لا) = تو لا لا کا اس کی اعظم اور
 اقل قیمتوں کے لحاظ سے امتحان کرو۔

حل۔ ف (لا) کو تفریق کرنے سے ف (لا) = $\frac{تو (۱-۲ لا)}{۲ لا}$

ف (لا) کو صفر کے مساوی لکھنے سے لا = $\frac{۱}{۲}$ حاصل ہوتا ہے۔
 اب ف (لا) کے جملہ میں بجائے لا کے $\frac{۱}{۲}$ + ۵ لکھنے سے (جس میں ۵ کافی
 چھوٹی مقدار ہے)۔

ف (۵+ $\frac{۱}{۲}$) = $\frac{تو (۵+\frac{۱}{۲}) (۵-)}{۲ (۵+\frac{۱}{۲})}$
 غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ف (۵+ $\frac{۱}{۲}$) مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتا ہے

جبکہ منفی سے مثبت میں تبدیل ہوتا ہے۔ پس f (لا) کی نقطہ $\lambda = \frac{1}{4}$ پر ایک
اعظم قیمت ہے اور وہ $= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ہے۔

f (لا) کی اعظم و اقل قیمتیں جبکہ f (لا) لامتناہی
ہوتا ہے اور f (لا) مسلسل تفاعل ہے۔ شکل ۱۶ کے لحاظ
سے معلوم ہوگا کہ h یا p پر f (لا) مسلسل ہے اور ایک اعظم قیمت رکھتا ہے
لیکن f (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے اس لیے کہ خط h اس ان نقطوں پر محور h کے
متوازی ہے۔ نقطہ y پر f (لا) مسلسل ہے اور ایک اقل قیمت رکھتا ہے
لیکن یہاں بھی f (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے۔ ایسی صورتوں میں چونکہ f (لا) $= \infty$

$$= \frac{1}{f(\lambda)}$$

دیکھو کہ لاکس فاصل (critical) قیمت کے لیے $\frac{1}{f(\lambda)} = \infty$ اگر قیمت لا ہے تو

دیکھو کہ لاکس لا سے ضعیف سی چھوٹی قیمت کے لیے آیا f (لا) مثبت ہے اور

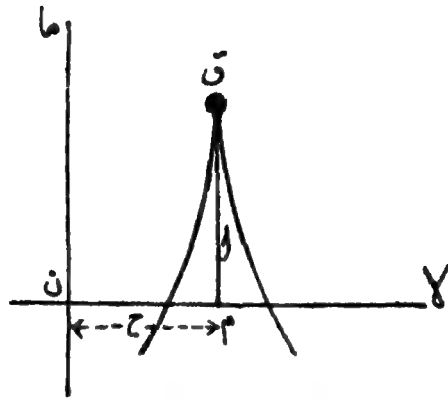
لا سے ضعیف سی بڑی قیمت کے لیے f (لا) منفی ہے۔ اگر ایسا ہے تو f (لا) نقطہ لا
پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے۔ لیکن اگر پہلی صورت میں یعنی لاکس لا سے ضعیف سی چھوٹی
قیمت کے لیے f (لا) منفی ہے اور دوسری صورت میں یعنی لاکس لا سے ضعیف سی
بڑی قیمت کے لیے f (لا) مثبت ہے تو نقطہ لا پر f (لا) ایک اقل قیمت
رکھتا ہے۔

شکل ۱۷ میں h کے نقطہ k پر بھی f (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن
یہاں تفاعل نہ تو ایک اعظم قیمت رکھتا ہے اور نہ ایک اقل قیمت۔

توضیحی مثال - تفاعل h - b (لا - j) کا اس کی اعظم و اقل
قیمتوں کے لیے امتحان کرو۔

حل - تفریق کرنے سے

$$\begin{aligned} \text{ف (لا)} &= \frac{۲}{۴(ج-لا)۳} \\ \therefore \text{ف (لا)} &= \frac{۱}{۲(ج-لا)۳} \end{aligned}$$



شکل ۱۷

چونکہ لا = ج ایک قائل قیمت ہے جس کے لیے $\text{ف (لا)} = \frac{۱}{۲}$ (اور ف (لا) = ∞) لیکن جس کے لیے ف (لا) لامتناہی نہیں ہے پس مصرعہ بالا قاعدہ کے لحاظ سے اس تفاعل کا لا = ج نقطہ پر اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان ہو سکتا ہے۔ چنانچہ

جب لا > ج ، ف (لا) = مثبت

جب لا < ج ، ف (لا) = منفی

پس جب لا = ج = ن م (دیکھو شکل ۱۷) اس تفاعل کی ایک اعظم قیمت ف (ج) = ۱ = ق م ہے۔

مثالیں

(۱) ذیل کے تفاعل کا اعظم و اقل قیمت کے لیے امتحان کرو :

$$۱۵ - ۵\lambda + ۲\lambda^2 \quad \text{جواب } \lambda = ۱ \text{ پر اعظم}$$

$$\text{قیمت} = ۱۴ = \lambda = ۱ \text{ پر اقل}$$

$$\text{قیمت} = ۱۳ = \lambda = ۰ \text{ پر اعظم}$$

نہ اقل -

(۲) امتحان کر کے بتاؤ کہ تفاعل $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ کا اعظم و اقل قیمت کیا ہے اور $\lambda = ۲$ پر اقل قیمت $= -\frac{1}{p}$ ہے

$$\lambda = ۱ \text{ پر اعظم قیمت} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = ۲ \text{ پر اقل قیمت} = -\frac{1}{p}$$

$$(۳) \frac{(1-\lambda)(1-\lambda)}{\lambda^2} = \text{نقطہ } \lambda = \frac{1}{p} \text{ پر اعظم} = \frac{(1-\lambda)(1-\lambda)}{\lambda^2}$$

$$(۴) \frac{(1-\lambda)(1-\lambda)}{\lambda^2} = \text{نقطہ } \lambda = \frac{1}{p} \text{ پر اعظم} = \frac{1}{p}$$

$$\lambda = ۱ \text{ پر اقل} = ۰ \text{ اور } \lambda = \frac{1}{p} \text{ پر اعظم نہ اقل -}$$

$$(۵) \frac{(1-\lambda)(1-\lambda)}{\lambda^2} = \text{نقطہ } \lambda = \frac{1}{p} \text{ پر اقل} = \frac{1}{p}$$

اعظم و اقل قیمتوں کے اطلاقی سوالات کے لیے

عام ہدایات -

اکثر سوالات میں مقدمات کے شرائط کے بموجب پہلے خود اس تفاعل کو تیار کرنا ہوتا ہے جس کی اعظم و اقل قیمتیں مطلوب ہیں۔ بعض افقات اس تیاری میں بڑی قیمت پیش آتی ہے۔ اور کوئی ایسا قاعدہ جو تمام صورتوں پر حاوی ہو بتایا نہیں جاسکتا۔ البتہ ذیل کی ہدایات بہت سارے سوالات کے حل میں کارآمد ہو سکتی ہیں :-

عام ہدایات - (۱) پہلے وہ تفاعل تیار کر لیا جائے جس کا اعظم یا اقل مطلب

سوال میں شامل ہے۔

(ب) اگر اس تفاعل کا جملہ ایک سے زائد متغیر پر مشتمل ہے تو سوال ہی کے شرائط سے ان متغیروں کے مابین کافی رابطہ ہوتا ہو سکتی ہے، جس کی وجہ سے تمام متغیر ایک واحد متغیر کی رقموں میں لکھے جاسکتے۔

(ج) واحد متغیر کے حاصل تفاعل پر اعظم و اقل قیمتوں کی تعین کا قبل ان میں مصرعہ قاعدہ عام کیا جائے۔

(د) عمل کی نتیجہ کے لیے تفاعل کی ترسیم بھی کھینچی جائے۔

اعظم و اقل قیمتوں کی تعین مندرجہ ذیل اصول کی مدد سے (جو ابھی تصور کیے جاسکتے ہیں) اکثر آسان ثابت ہو سکتی ہے۔

(۱) مسلسل تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں متبادلاً صورت پذیر ہونی چاہئیں۔

(ب) ک جب ایک مثبت مستقل ہوتا ہے ک ف (لا) ایک اعظم ہوتا ہے یا اقل لا کی ایسی اور صرف ایسی قیمتوں کے لیے جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بناتی ہیں۔ [پس لا کی فاصل قیمتوں کی تعین اور تفاعل کے اعظم و اقل کے امتحان میں مستقل جزو ضروری متروک کر دیا جاسکتا ہے]۔

اسی طرح اگر ک ایک منفی مستقل ہے تو ک ف (لا) اعظم ہے جبکہ ف (لا) اقل ہے اور ک ف (لا) اقل ہے جبکہ ف (لا) اعظم ہے۔

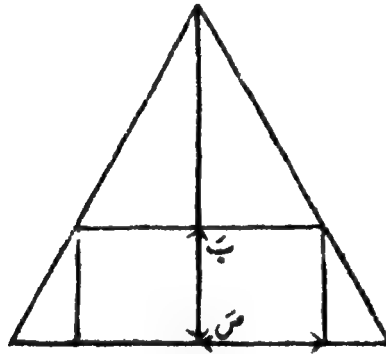
(ج) اگر ک ایک مستقل ہے تو لا کی جس قیمت پر ف (لا) کی قیمت اعظم یا اقل ہوتی ہے ک + ف (لا) کی قیمت بھی لا کی اسی قیمت پر اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ [پس لا کی فاصل قیمتوں کی تعین اور تفاعل کے امتحان میں مستقل رقم متروک کر دی جاسکتی ہے]

توضیحی مثالیں۔ (۱) خط مکانی سے دیے ہوئے قطع ن ک ک

میں جو مستطیل کھینچا جاسکتا ہے اس کا رقبہ اعظم ہوتا ہے جبکہ اس کی چوڑائی محوری طول ط کا $\frac{1}{2}$ حصہ ہوتی ہے۔

حل۔ ن م = ط، فرض کرو ا د ن ل = لا

(۲) اعظم حجم کے اسطوانہ کا نصف قطر اور بلندی دریافت کر جو ص نصف قطر اور ب بلندی کے انعام دائری مخروط کے اندر تیار ہو سکتا ہے -
 حل - فرض کر دو کہ ص اور ب مخروط کا اندرونی اسطوانہ ہے - اس کا حجم $H = \pi \times \text{ص}^2 \times \text{ب}$ جو دو متغیروں کا تفاعل ہے - ہم سوال کے ہندسہ کی مدد سے ایک متغیر کو دوسرے کی رقتوں میں تعبیر کر سکتے ہیں - چنانچہ شکل ۱۹ سے واضح ہے کہ مشابہ مثلثوں کے خواص سے



$$\frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{ب} - \text{ب}}{\text{ص} - \text{ص}}$$

$$\therefore \text{ب} = \text{ب} - \frac{\text{ب} \times \text{ص}}{\text{ص}}$$

$$\text{پس حجم } H = \pi \times \text{ص}^2 \times (\text{ب} - \frac{\text{ب} \times \text{ص}}{\text{ص}})$$

$$\text{اس کو تفریق کرنے سے } \frac{H}{\pi \times \text{ص}^2} = \pi \times \text{ص}^2 \times (\frac{\text{ب}}{\text{ص}} - \frac{\text{ب} \times \text{ص}}{\text{ص}^2})$$

$$= \pi \times \text{ص}^2 \times (\frac{\text{ب}}{\text{ص}} - \frac{\text{ب} \times \text{ص}}{\text{ص}^2})$$

اس جملہ کو صفر کے مساوی لکھ کر ص کے لیے حل کرنے سے ص کی قیمت صفرا $\frac{2}{3}$ برآمد ہوتی ہے -

واضح ہے کہ ص = . متقابل کی اقل قیمت سے متعلق ہے اور ص = $\frac{۲}{۳}$
 اس کی اعظم قیمت سے -
 پس مطلوبہ اعظم اسطوانہ کی ہندی ب - $\frac{۲}{۳}$ ب یعنی $\frac{۲}{۳}$ ہے -

مثالیں

ثابت کرو کہ :-

(۱) نصف قطر ص والے کرہ میں اعظم حجم کا جو قائم دائری مخروط بن سکتا ہے
 اس کی ہندی $\frac{۲}{۳}$ ص ہے -

(۲) ایک دیے ہوئے کرہ کے اندر اعظم حجم کا جو قائم دائری اسطوانہ تیار کیا جاسکتا ہے
 اس کی ہندی کرہ کے نصف قطر کی $\frac{۲}{۳}$ ہے -

(۳) نصف قطر ص والے کرہ کے گرد اقل حجم کا جو قائم دائری مخروط بنایا جاسکتا
 ہے اس کا ارتفاع (یعنی ہندی) = $\frac{۴}{۳}$ ص

(۴) ۲ ب ۲ لا ۲ + ۲ ما = ۲ ب خط ناقص کے اندر اعظم تساوی الساقین
 مثلث جس کا راس ناقص کے محور اقل کے سرے پر واقع ہے $\frac{۳}{۴}$ ب رقبہ
 رکھتا ہے -

(۵) دیے ہوئے محیط کے اعظم رقبہ والے دائری قطع کا مرکز دائرہ پر کا زاویہ
 ۲ نیم قطریاں ہے -

(۶) اقل مجموعی رقبہ سطح کے ایک دیے ہوئے حجم والے قائم دائری مخروط کے لیے

ہندی کی نسبت $\frac{۲}{۳}$ ہے -

(۷) $\frac{۲}{۳}$ لا $\frac{۲}{۳}$ + $\frac{۲}{۳}$ ما = اکے ناقص کے اندر جو اعظم مستطیل کھینچا جاسکتا ہے
 اس کے ضلعوں کا طول $\frac{۲}{۳}$ و اور $\frac{۲}{۳}$ ب ہے -

(۸) ڈائن اگنیسی (Witch of Agnesi) کی مساوات

$$= ۱ - \frac{۲}{۲ + ۲}$$

اس کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ مستطیل جس کا قاعدہ محمد لا پر ہو اور جس کے دو اس ڈائن پر ہوں اس کا اعظم رقبہ $\frac{1}{2} \times 12$ (۹) مستطیل شہتیر کی مضبوطی اس کی چوڑائی اور اس کی موٹائی کے مکعب کے حاصل ضرب کے لحاظ سے بدلتی ہے۔ اعظم مضبوطی کی مستطیل شہتیر کے ابعاد دریافت کرو جو ص نصف قطر والے اسطوانہ سے تراشی جاسکتی ہے۔

جواب - چوڑائی = ص، موٹائی = ص ۳۶

(۱۰) دائری لچھے پر سے گزرنے والی برقی رو کا مقناطیسی میدان ایسے نقطہ پر جو لچھے کے محور پر (یعنی خط مستقیم جو اس کے ستوی کے علی القوائم اور اس کے مرکز میں سے گزرتا ہو) مرکز سے لا فاصلہ پر واقع ہو $\frac{2\pi \times 10^{-7} \times I}{(2 + \frac{1}{2})}$ کے متناسب ہے۔ جس میں ص لچھے کا نصف قطر ہے۔ ثابت کرو کہ یہ میدان اعظم ہے جبکہ لا = $\frac{2}{3}$ ۔

۵۔ تفاعل کے تفرقی سرے یا مشتق کا نقصوں بطور شرح

تبدیلی تفاعل -

اس احصاء کی کتاب کے ابتدائی بابوں میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ما = ف (لا)

تو $\frac{مف}{لا} = \frac{ما}{لا}$ کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا جبکہ لا بدل کر لا + مف لا ہوتا ہے۔

اگر ما = ہ لا + ج جس میں ہ اور ج مستقل ہیں تو $\frac{مف}{لا} = \frac{ما}{لا} = \frac{ہ لا + ج}{لا}$ ایک مستقل ہے۔ یعنی ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا خط مستقیم کی ڈھلان ہ کے مساوی ہے اور مستقل ہے۔ صرف اس صورت ہی میں ما کی تبدیلی (مف) جبکہ لا اپنی کسی قیمت لا سے بدل کر لا + مف لا ہو جاتا ہے شرح تبدیلی ہ مضروب مف لا کے مساوی ہے۔

آنی شرح تبدیلی - جیسا کہ قبل ازیں بیان ہو چکا ہے، اگر

لا سے لا + مف لا کا وقفہ گھٹتا ہے اور مف لا ← تب ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا اس وقفہ کے اندر انتہائی حالت میں ما کی آنی شرح تبدیلی بلحاظ لا ہو جاتی ہے۔ پس، مسلمہ طریق قنابت میں

فرما = ما کی آنی شرح تبدیلی بلحاظ لا، لا کی ایک معین قیمت کے لیے
 مثلاً اگر ما = لا تو مف لا = $\frac{(لا + مف لا) - مف لا}{مف لا} = \frac{لا + ۲}{مف لا}$

اگر لا = ۵ اور مف لا = ۰.۵ تو $\frac{لا + ۲}{مف لا} = \frac{۵.۵}{۰.۵} = ۱۱$ اور ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا جبکہ لا کی قیمت ۵ سے بڑھ کر ۵.۵ ہوتی ہے تو ۱۱ ہے۔ اور چونکہ
 فرما = $\frac{لا + ۲}{مف لا}$ اس لیے ما کی آنی شرح بلحاظ لا = $۵ \times ۲ = ۱۰$ یعنی ۱۰ اکائیوں

نی اکائی تبدیلی لا = اکثر اوقات لفظ ”آنی“ متروک کر دیا جاتا ہے۔
 تفاعل لا کی ترسیم کھینچ کر یا سانی بتایا جاسکتا ہے کہ ما کی ترسیم کے کسی نقطہ ف (محدود لا، ما) پر اس کی آنی شرح تبدیلی نقطہ ف پر کے خط جماعت کی مستقل شرح تبدیلی ہے۔

جبکہ لا = لا تب ما یعنی ف (لا) کی آنی شرح تبدیلی = ف (لا)۔
 اب اگر لا بدل کر لا + مف لا ہوتا ہے ما کی صحیح (exact) تبدیلی ف (لا) مف لا کے مساوی نہیں ہوتی ہے الا اس صورت کے جبکہ ف (لا) مستقل ہے، جیسا کہ خط مستقیم کی مساوات میں مشاہدہ ہوا۔ بریں ہم ہم آگے چل کر دیکھینگے کہ یہ عامل ضرب مف ما کے تقریباً مساوی ہے جبکہ مف لا کافی چھوٹا ہوتا ہے۔

مستقیم خطی حرکت میں رفتار۔ متغیر متبوع جب وقت ہوتا

ہے تو تفاعل کا تفرقی سر یا مشتق شرح بلحاظ وقت یا زمانی شرح کہلاتا ہے۔ اس کی سادہ ترین مثال مستقیم خطی حرکت میں ملتی ہے۔ فرض کرو

شکل ۱۔ میں ایک نقطہ ف خط متقیم اب پر حرکت کر رہا ہے۔ اس کا



شکل ۲۔

فاصلہ کسی ثابت نقطہ ن سے اس کے کسی مقام تک س ہے اور اس کا متناظر وقت و ہے۔ و کی ہر قیمت کے ساتھ ف کا بھی ایک مقام معین ہے۔ پس فاصلہ س وقت و کا ایک تفاعل ہے۔ یعنی

$$س = ف (و)$$

اب اگر و میں اضافہ مع و ہوتا ہے تو س میں اضافہ مع س صورت پذیر ہوتا ہے جو وقت مع و میں طے شدہ فاصلہ ہے۔ اور

$$\frac{مع س}{مع و} = \text{نقطہ ف کی اوسط رفتار جبکہ وہ ف سے}$$

ف تک وقفہ وقت مع و میں حرکت کرتا ہے۔ اگر ف کی حرکت یکساں ہے یعنی رفتار مستقل ہے تو وقت کے ہر وقفہ کے لیے نسبت $\frac{مع س}{مع و}$ کی ایک ہی قیمت ہوگی اور وہ کسی آن کی بھی رفتار ہوگی۔ حرکت کی عام قسم کے لیے خواہ یکساں ہو یا غیر یکساں کسی آن کی رفتار (یعنی فاصلہ کی زمانی شرح) کی یوں تعریف کی جاسکتی ہے کہ وہ اوسط رفتار کی انتہا ہے جبکہ مع و بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے۔ یعنی

$$ر = \frac{فر س}{فر و}$$

حرابوط یا متعلق (Related) شرحیں۔ اکثر سوالوں میں

کئی متغیروں سے سابقہ پڑتا ہے جن میں سے ہر ایک وقت کا تفاعل ہوتا ہے۔

سوال کے شرائط کے لحاظ سے پہلے ان متغیروں کے مابین رابطے قائم کیے جاتے ہیں اور بعد ازاں عمل تفرق کے ذریعے ان کی تبدیلی کی بجائے وقت شرحوں میں رابطے دریافت کیے جاتے ہیں۔

شرح کے سوالات حل کرنے میں مندرجہ ذیل ہدایات مفید ہیں :-
(۱) سوال کی توضیح کے لیے ایک شکل کھینچ لی جائے۔ وقت کے لحاظ سے جو مقادیر بدلتے ہیں ان کو 'لا'، 'ما'، 'ی' وغیرہ سے تعبیر کرو۔
(۲) جن متغیروں سے بحث ہو ان کے مابین ایسے ضابطے حاصل کرو جو کسی آن کے لیے بھی صحیح ہوں۔

(۳) وقت کے لحاظ سے تفرق کرو۔
(۴) دیے ہوئے مقادیر اور مطلوبہ مقادیر کی ایک فہرست تیار کرو۔
(۵) تفرق کے عمل سے جو نتیجہ دریافت ہوا ہو اس کے اندر معلوم مقادیر کو تعویض کرو۔ اور غیر معلوم مقادیر کی مساواتوں کو حل کرو۔

توضیحی مثالیں (۱) ل سمر طول کے سادہ رقص کے ایک کامل

ایہ سراز کے وقت دوران کا ضابطہ کسی مقام پر $ل = ۲۰.۴$ سال ثانیہ ہے۔
رقص کے طول کے لحاظ سے وقت دوران کی تبدیلی کی شرح دریافت کرو
جبکہ $ل = ۲۵$ سمر۔ اور اس کے ذریعے بتاؤ کہ وقت دوران میں کیا تقریبی
تبدیل واقع ہوگا جبکہ $ل = ۲۵$ سمر سے بڑھ کر ۲۵.۵ سمر ہو جائیگا۔

$$\text{حل۔ چونکہ } ۲۰.۴ = (ل) \frac{۱}{۲۰} \text{ فرس } = \frac{۲۰.۴}{۲۰} (ل) \frac{۱}{۲۰}$$

$$ل \text{ جب } ۲۵ \text{ سمر ہے تو } \frac{۲۰.۴}{۵ \times ۲} = \frac{۲۰.۴}{۱۰} = ۲.۰۴ \text{ ثانیہ فی سمر}$$

اور ل جب ۲۵ سمر سے بڑھ کر ۲۵.۵ سمر ہوتا ہے تو و میں تقریبی تبدل

$$۲.۰۴ \times ۰.۵ = ۱.۰۲ \text{ ثانیہ ہوتا ہے۔}$$

(۲) ایک ذرہ خط مکانی $۱' = ۱۱۹$ میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ لا کی قیمت جب ۴ ہے تو فصلہ بشرح ۶ فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے۔ بتاؤ اُس وقت معین کے بڑھنے کی کیا شرح ہے۔

حل۔ چونکہ $۱' = ۱۱۹$ ∴ وقت کے لحاظ سے تفرقہ کرنے سے

$$\frac{۱۲ \text{ فرما}}{\text{فر و}} = \frac{۹ \text{ فرما}}{\text{فر و}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فر و}} = \frac{۹}{۱۲} \frac{\text{فرما}}{\text{فر و}}$$

لیکن از روئے مساوات خط مکانی $۱' = ۱۱۹ \pm ۳$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فر و}} = \pm \frac{۹}{۱۱۹ \pm ۳} \frac{\text{فرما}}{\text{فر و}}$$

$$\pm = \frac{\text{فرما}}{\text{فر و}} \frac{۳}{۱۱۹ \pm ۳}$$

یعنی مکانی کے کسی نقطہ پر بھی معین کی تبدیلی کی شرح $\pm \frac{۳}{۱۱۹}$ شرح تبدیلی

فصلہ ہے لا کی قیمت جب ۴ ہے تو دیا گیا ہے کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فر و}} = ۶$ فٹ فی ثانیہ

اس لیے دراصل لیک $۱۱۹ = \frac{\text{فرما}}{\text{فر و}} \pm = \frac{۳}{۲ \times ۲} \pm \times ۶$ فٹ فی ثانیہ

$$= \pm \frac{۹}{۲} \pm = ۴ \frac{۱}{۲} \text{ فٹ فی ثانیہ}$$

واضح ہو کہ لا کی ہر ایک قیمت پر ماکہ دو مساوی قیمتیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی پس $۱۱۹ = ۴$ کی صورت میں خط مکانی کا ایک معین بشرح $\frac{۱}{۲} \times ۴$ فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے اور اس کے مقابل کا معین بشرح $\frac{۱}{۲} \times ۴$ فٹ فی ثانیہ گھٹتا ہے۔

مثالیں

(۱) ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعے ایک ایک فٹ لمبے ہیں۔ اگر وہ

بشرح $\frac{1}{4}$ انچ فی منٹ بڑھتے جائیں تو بتاؤ کہ مثلث کے رقبے کے بڑھنے کی شرح

۳۱۲ مربع انچ فی منٹ ہے۔
(۲) گردشی مجسم ناقص نما مثل کے غیارہ کا سب سے بڑا محور اس کے ایک چھوٹے محور کا دو چندان ہے اور دوسرے چھوٹے محور کا سہ چندان ہے۔ اگر غیارہ میں گیس بشج ۱۲۰ مکعب فٹ فی منٹ بھری جا رہی ہے جبکہ وہ ۱۲ فٹ لمبا ہے اور یکساں پھولتا جا رہا ہے تو ثابت کرو کہ اس کے طول کے بڑھنے کی شرح $\frac{1}{4}$ فٹ فی منٹ ہے [اشارہ - گردشی مجسم ناقص نما کا حجم $\frac{4}{3}\pi r^2 h$ ہے جس میں r ب ج سے جس میں h ب ج مجسم کے نصف محور ہیں۔]

(۳) ۱۲ فٹ قطر کے نصف گروی کٹورے میں مائع بشرح ۶ مکعب فٹ فی منٹ ڈالا جا رہا ہے۔ اگر کٹورے کی آدھی گہرائی بھری ہو تو بتاؤ کہ اس وقت مائع کی سطح کے بلند ہونے کی شرح $\frac{1}{4}$ فٹ فی منٹ ہے۔

[اشارہ - گروی قطاع کا حجم $\frac{1}{4}\pi r^2 h$ ہے (۳ ص) + (۲ ب) جس میں h متوی سطح کا نصف قطر ہے اور r اس کی بلندی]

(۴) ایک سیڑھی ۱۳ فٹ لمبی ہے۔ اس کا اوپر کا سرا ایک انتصابی دیوار سے لگا ہوا ہے اور نیچے کا سرا سطح زمین پر ٹکا ہوا ہے۔ اگر یہ نیچے کا سرا دیوار سے مخالف سمت میں بشرح ۳ فٹ فی ثانیہ کھینچا جائے جبکہ وہ دیوار سے ۵ فٹ دور ہو تو بتاؤ کہ اوپر کا سرا دیوار پر سے بشرح $\frac{1}{4}$ فٹ فی ثانیہ نیچے اترتا جائیگا۔

(۵) حرنا گزاد طریقہ پر گیس کی ایک مقدار دہائی جا رہی ہے۔ اگر کسی وقت

۵۶ پونڈ فی مربع انچ دباؤ کے تحت اس کا حجم ۱۰ مکعب فٹ ہے۔ اور بشرح ایک مکعب فٹ فی ثانیہ گھٹتا جا رہا ہے تو دریا فٹ کرو کہ دباؤ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے حرنا گزاد استحالوں کا ضابطہ $h = 1.3$ مستقل ہے۔

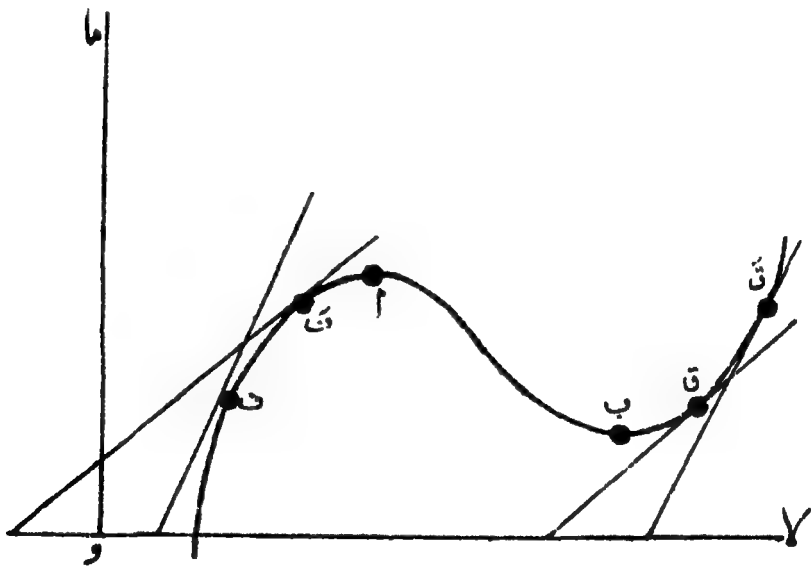
[جواب - تقریباً ۹، پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ اضافہ]

(ب) آسان ہندسی و طبیعی مسائل میں متواتر تفریق کا استعمال۔

۲۔ منحنی کے ٹرنز کی سمت اور اس کے ذریعہ

اعظم و اقل قیمتوں کی پیمان کا طریقہ۔

شکل ۱۱۱ میں ف ت اب ق ق ایک منحنی ہے جو ایک نقطہ (محدود لا) کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ نقطہ سے جیسے جیسے منحنی کو مرسم ہوتا ہے اس پر منحنی کے ماس کا دھلان بدلتا جاتا ہے۔ خط ماس جب منحنی کے اوپر واقع ہوتا ہے تو اس حصہ میں منحنی کا قوس نیچے کی طرف محو ف ہوتا ہے اور جب خط ماس منحنی کے نیچے واقع ہوتا ہے تو یہاں منحنی کا قوس اوپر کی طرف محو ف ہوتا ہے۔ شکل میں منحنی کا دھلان گھٹتا جاتا ہے جبکہ نقطہ قوس ف ا کو مرسم کرتا ہے۔ اس حصہ میں مایع فہ (لا) (منحنی جس کی ترسیم ہے) لا کا ایک گھٹنے والا تفاعل ہے۔ اس کے علی الرغم نقطہ (لا) جبکہ قوس ب ف کو مرسم کرتا ہے



شکل ۲۱

تو طفلان بڑھتا جاتا ہے اور اس حصہ میں فہ (لا) لاکا ایک بڑھنے والا تفاعل ہے

پس اول الذکر صورت میں $فہ$ (لا) کا تفرقی سر یعنی $فہ$ (لا) ایک منفی مقدار ہے اور ثانی الذکر صورت میں $فہ$ (لا) مثبت مقدار ہے۔ پس کس نقطہ پر منفی کے مڑنے کی سمت کا اس طرح پتہ چل سکتا ہے:-

۱ = $فہ$ (لا) کی ترسیم نیچے کی طرف مجوف ہوتی ہے اگر ما کا دوسرا شتق بجاٹا لا منفی ہے اور اوپر کی طرف مجوف ہوتا ہے جبکہ یہ شتق مثبت ہوتا ہے۔ نقطہ ۱ پر قوس نیچے کی طرف مجوف ہے اور منفی کا معین ایک اعظم قیمت رکھتا ہے۔ یعنی $فہ$ (لا) = ۰ اور $فہ$ (لا) منفی ہے۔ نقطہ ۲ پر قوس اوپر کی طرف مجوف ہے اور منفی کا معین ایک اقل قیمت رکھتا ہے۔ یعنی $فہ$ (لا) = ۰ اور $فہ$ (لا) مثبت ہے۔ پس تفاعل $فہ$ (لا) کی اعظم و اقل قیمتیں دریافت کرنی ہوں تو

(۱) تفاعل کا شتق دریافت کر لیا جائے (۲) اس شتق کو صفر کے مساوی لکھ کر متغیر کی فاصل قیمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات حل کی جائے اور اس کی حقیقی اصلیں حاصل کرنی جائیں (۳) تفاعل کا ثانوی شتق معلوم کیا جائے (۴) اور اس ثانوی شتق میں متغیر کی بجائے اس کی ہر ایک فاصل قیمت تعویض کی جائے۔ اگر اس طرح ایک منفی مقدار حاصل ہوتی ہے تو تفاعل اس فاصل قیمت پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے۔ اور اگر ایک مثبت مقدار حاصل ہوتی ہے تو تفاعل ایک اقل قیمت رکھتا ہے۔

جب $فہ$ (لا) = ۰ یا غیر موجود ہے تو یہ طریقہ بیکار ہو جاتا ہے اگرچہ اس صورت میں بھی تفاعل کی ایک اعظم یا اقل قیمت ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں قبل ازیں جو اساسی طریقہ (دیکھو) بتایا گیا ہے کارآمد ثابت ہوگا۔ حالیہ طریقہ عموماً کام دیتا ہے اور جب تفاعل کے ثانوی شتق کی تعیین ضرورت سے زیادہ طویل یا مشقت طلب نہیں ہوتی ہے تو یہی طریقہ سب سے مختصر پایا جاتا ہے۔

توضیحی مثال - مندرجہ بالا طریقہ سے تفاعل $۱ = ۳ - ۳۶ - ۳۰ + ۶۰$

کا اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان کرو۔

$$\text{حل : } ۱ = ۳ - ۳۶ - ۳۰ + ۶۰$$

$$\frac{۱}{۶۰} = \frac{۱۲}{۳۰} - \frac{۱۲}{۳۶} - \frac{۱۲}{۳۰} + \frac{۱۲}{۶۰}$$

اس کو صفر کے مساوی لکھنے سے $لا (لا^۳ - لا^۲ - ۶ - ۰) = لا (لا - ۳) (۲ + لا) = ۰$

یعنی $لا = ۰$ یا $لا = ۳$ یا $لا = ۲$

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا لا کی ان تینوں قیمتوں پر ا اعظم ہے یا اقل

فرض $لا = ۲$ تو $۳ - لا^۲ - لا - ۶$ پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر

$لا = ۰$ تو $\frac{۲ - لا^۲}{لا} = ۶ - ۶$ اور چونکہ یہ منفی ہے اس لیے $لا = ۰$ پر
ا اعظم ہے اور اس کی قیمت -۶ ہے۔

اگر $لا = ۳$ تو $\frac{۲ - لا^۲}{لا} = ۶ - ۶ - ۲ = -۲$ جو مثبت ہے اس لیے

$لا = ۳$ پر ا اقل ہے اور اس کی قیمت $۲۴۳ - ۱۰۸ - ۳۲۴ + ۶۰ = -۱۲۹$

ہے۔

اگر $لا = ۲$ تو $\frac{۲ - لا^۲}{لا} = ۱۲ - ۴ - ۶ = ۱۰$ جو مثبت ہے اس لیے

$لا = ۲$ پر ا اقل ہے اور اس کی قیمت $۴۸ - ۳۲ + ۱۲۴ - ۶۰ = ۸۰$ ہے۔

مثالیں

(۱) $۱ = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵$ کی ترسیم کیجیو۔ اور بتاؤ کہ $لا = ۱$ پر

اس کی اعظم قیمت ۱۰ ہے اور $لا = ۳$ پر اقل قیمت -۲۲ ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ $۱ = لا^۳ - لا^۲ - لا$ کی اعظم قیمت $\frac{۱}{۴}$ جو $لا = \frac{۱}{۲}$ پر واقع

ہوتی ہے اور اقل قیمت $-\frac{۱}{۴}$ جو $لا = -\frac{۱}{۲}$ پر واقع ہوتی ہے۔

(۳) $۵ - لا^۳ - لا^۲ - لا + ۱$ کی اعظم قیمت $(= ۵۸)$ $لا = ۲$ پر واقع

ہوتی ہے اور اقل قیمت $(= -۳۸)$ $لا = ۲$ پر واقع ہوتی ہے۔

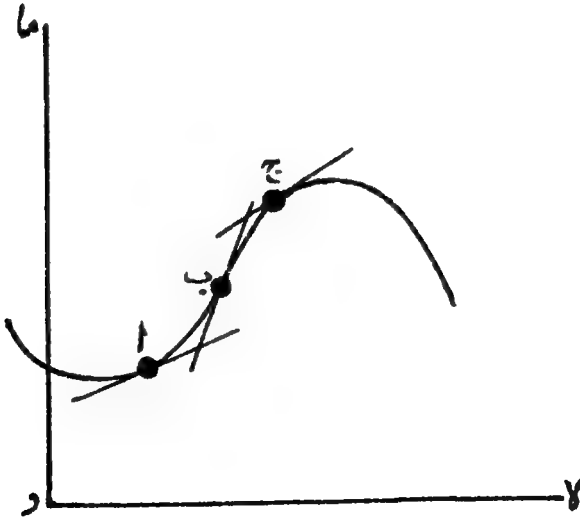
(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے قطر کے دائرے کے اندر کھینچے ہوئے مثلثوں میں مثلث متساوی الاضلاع کا رقبہ سب سے بڑا ہے۔

(۵) دو قصبے ۱ اور ۲ ایک ریل کی سیدھی سڑک ج سے علی الترتیب ۴ اور ۸ میل فاصلوں پر واقع ہیں۔ اگر قصبہ ۱ کے لیے ریل کی سڑک کا قریب ترین مقام ج ہے اور قصبہ ۲ کے لیے قریب ترین مقام د اور ج د = ۹ میل تو بتاؤ کہ ریل کا اسٹیشن کہاں قائم کیا جائے تاکہ اس سے ۱ اور ۲ تک کی سڑکوں کا مجموعی طول اقل ہو۔
[جواب = ج سے ۳ میل]

۱۔ نقاطِ عطف۔ منحنی کے نقطہ عطف سے مراد وہ نقطہ ہے جو مڑنے

کی باہم دیگر مخالف سمتوں میں مڑنے والی قوسوں کو ایک دوسرے سے علیحدہ کرتا ہے۔ نقطہ عطف سے ایک طرف اگر منحنی کی قوس ایک لحاظ سے جھوٹ ہے تو اس کے دوسرے طرف اسی لحاظ سے منحنی کی قوس محدب ہے۔

شکل ۱۔ میں ب منحنی کا ایک نقطہ عطف ہے۔ ۱ پر منحنی کی قوس اوپر سے



شکل ۲۲

محوف ہے اور جہاں اسی لحاظ سے محذب منحنی کا مُرسم نقطہ جب نقطہ عطف سے گزرتا ہے تو وہاں تفاعل کے ثانوی شتق کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے اور اگر منحنی مسلسل ہے تو یہ شتق اس نقطہ پر معدوم ہوتا ہے۔ پس نقطہ عطف پر $f'(x) = 0$ ۔ اس مساوات کو حل کرنے سے نقاط عطف کے فصلے معلوم ہو جاتے ہیں کسی نقطہ عطف کے قریب منحنی کے ٹرنے کی سمت دریافت کرنے کے لیے پہلے اس نقطہ کے فصلے سے ذرا سی کمتر قیمت اور پھر ذرا سی زائد قیمت کا فصلہ لے کر دیکھو کہ تفاعل کے ثانوی شتق کی علامت کیا ہے۔ اس سے پتہ چل جائیگا کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کے کس طرف توس محوف ہے اور کس طرف محذب۔ شکل کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ جہاں منحنی کا حصہ اوپر کی طرف محوف ہے جیسے کہ ۱ کے پاس یہاں منحنی خطِ ماس کے اوپر واقع ہوگا اور جہاں نیچے کی طرف محوف ہے جیسے ج کے پاس وہاں منحنی خطِ ماس کے نیچے واقع ہوگا۔ نقطہ عطف ب پر خطِ ماس منحنی پر سے گزر جاتا ہے۔

پس منحنی $f(x) = 0$ کے کسی نقطہ عطف کی پہچان کے لیے پہلے $f'(x) = 0$ دریافت کرو۔ پھر اس کو صفر کے مساوی لکھ کر مساوات کی حقیقی اصلیں معلوم کرو۔ اس کے بعد ایک ایک اصل سے ضعیف سی کمتر اور پھر ضعیف سی زائد قیمت کا فصلہ لے کر دیکھو کہ آیا $f'(x) = 0$ کی علامت تبدیل ہوتی ہے اگر تبدیل ہوتی ہے تو وہاں نقطہ عطف واقع ہے۔ اس آخری عمل سے پہلے بعض اوقات $f'(x) = 0$ کو اس کے اجزاء ضربی کی رقوموں میں لکھنا مفید ہوتا ہے۔

ہم ذیل میں ایک ایسی مثال پیش کرتے ہیں جس میں $f'(x) = 0$ اور $f''(x) = 0$ دونوں لائق توجہ ہیں۔

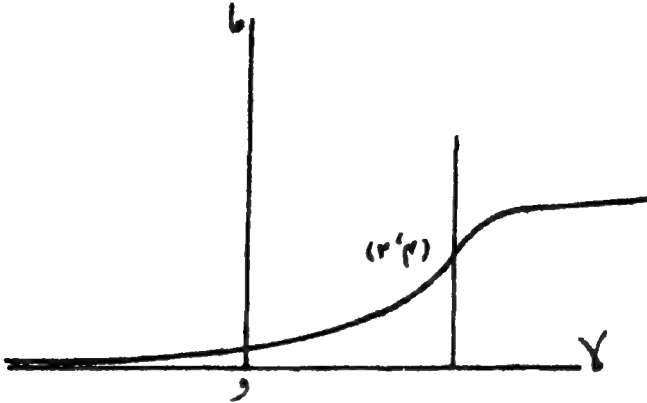
مثال - منحنی $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 4$ کا نقطہ عطف تلاش کرو۔

$$چونکہ \quad 6 = 12 - 6x \quad \text{اور} \quad 6 = 24 - 24x + 6x^2$$

$$\frac{6}{6} = \frac{12 - 6x}{6} = \frac{2 - x}{1}$$

$$\text{اور} \quad \frac{6}{6} = \frac{24 - 24x + 6x^2}{6} = \frac{4 - 4x + x^2}{1}$$

جبکہ $\lambda = \mu$ پہلا اور دوسرا دونوں شتق لامتناہی ہو جاتے ہیں۔



شکل ۲۳

جبکہ $\lambda > \mu$ $\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\mu}{\lambda}$ مثبت

اور جبکہ $\lambda < \mu$ $\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\mu}{\lambda}$ منفی

جہاں $\lambda = \mu$ تو $\mu = 2$

پس نقطہ (μ', μ) پر کا خط عماس محور λ کے علی القوالم ہے اور اس نقطہ کے بائیں جانب منفی اور کی طرف محور ہے اور اس کے سیدھے جانب نیچے کی طرف محور۔ لہذا (μ', μ) ایک نقطہ عطف ہے۔

مثالیں

- (۱) $\lambda = \mu$ - $\lambda = 3$ - μ کی ترسیم کا امتحان کر کے بتاؤ کہ اس کا کونسا حصہ متعقّر ہے اور کونسا محدب۔ اور نیز ثابت کرو کہ نقطہ $(1, 1)$ اس کا ایک نقطہ عطف ہے۔
- (۲) $\lambda = 1$ - $\lambda = 1$ کا اس کے مڑنے کی سمتوں اور نقابا عطف سے

متعلق امتحان کرو۔ [جواب۔ تقاطع طے کے بعد $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ اور $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ میں] (۳) بتاؤ کہ $1 = 2$ لا مبداء کے بائیں جانب نیچے کی طرف مقعر ہے اور اس کے سیدھے جانب اوپر کی طرف محدب ہے۔ لیکن $1 = 2$ لا ہر مقام پر اوپر کی طرف مقعر ہے۔

۸۔ ترسیم منحنیات۔ مستوی ہندسہ تحلیلی میں طالب علم نے

دیکھا ہوگا کہ جب کسی منحنی کی مساوات خطی محدبوں کی رقتوں میں دی جاتی ہے تو اس کی ترسیم کھینچنے کے لیے عموماً مساوات کو حل کر کے (اگر وہ حل ہو سکتی ہے) مایا لا کے لیے ایک جملہ حاصل کیا جاتا ہے اور لایا مایا کی موزوں عددی قیمتیں مان کر مایا لا کی متناظر قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں اور اس طرح منحنی کے کافی نقطوں کے محدب معلوم کر کے ترسیم تیار کر لی جاتی ہے۔ یہ طریقہ اول تو مساوات کے حل ہونے پر استعمال ہو سکتا ہے اور کسی حالت میں بھی بہت مشقت طلب ہے۔ اکثر اوقات صرف منحنی کی عام شکل معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثلاً یہ کہ منحنی کہاں مقعر ہے اور کہاں محدب، ایک سمت سے دوسری سمت میں کس کس مقام پر مڑتی ہے وغیرہ وغیرہ۔ ان امور کی فوری نقیبن احصاء کے ذریعے باسانی عمل میں آ سکتی ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل مثال سے معلوم ہوگا۔

مثال۔ منحنی $1 = 2 - 10$ کی ترسیم کھینچو۔

چونکہ $\frac{1}{10}$ سے منحنی کا ہر مقام پر ڈھلان معلوم ہو جاتا ہے اس لیے (۱) تفاعل کا

پہلا مشتق (یعنی $\frac{1}{10}$) دریافت کر کے صفر کے مساوی لکھا جائیگا۔ پھر اس کو حل کر کے

منحنی کے اعظم اداقل نقطوں کے فصلوں کا پتہ چلایا جائیگا یعنی لاکہ قیمتیں معلوم کر لی جائیں گی جن کے لیے مایا کی قیمتیں اعظم یا اقل ہیں۔ اس کے بعد (ب) تفاعل کا دوسرا مشتق (یعنی $\frac{1}{10}$) دریافت کیا جائیگا اور اس کو صفر کے مساوی مان کر منحنی کے تقاطع طے کے فصلوں کا پتہ چلایا جائیگا۔ پھر (ج) جن نقطوں کے فصلے

پہلے دو عملوں سے معلوم ہو چکے ہیں اُن کے متناظر معینوں کی قیمتیں محسوب کر لی جائیں گی۔
بعد ازاں (د) منحنی کی شکل معلوم کرنے کے لیے جتنے بھی اور نقطوں کے محدود لایا یا کی
مناسب قیمتیں فرض کر کے دریافت کیے جاسکتے ہیں دریافت کر لیے جائیں گے۔ اس طرح
جو نقطے دریافت ہو جائیں ان کے محدودوں وغیرہ کی ایک جدول تیار کر لی جائیگی۔ پھر
اس کے بموجب نقشہ کشی کے کاغذ پر نشانات لگا دیے جائیں گے۔ اور ان نشانات پر سے
ایک صاف گزر منحنی کھینچ دیا جائیگا۔

$$(۱) \text{ چونکہ } ۱ = ۱^۲ - ۲ \times ۱ + ۱^۲ \text{ فرما } ۱ - ۲ \times ۱ + ۱^۲ = ۰$$

$$\text{جب } \frac{x^2}{۱} = ۰ \text{ تو } ۱ - ۲ \times ۱ + ۱^۲ = ۰ \text{ یعنی } ۱ - ۲ \times ۱ + ۱^۲ = ۰$$

$$\therefore ۱ = ۰ \text{ یا } ۱ \pm ۰$$

$$(ب) \frac{x^2}{۴} = ۱ - ۲ \times ۱ + ۱^۲ \text{ پس جب } \frac{x^2}{۴} = ۰ \text{ تو } ۱ - ۲ \times ۱ + ۱^۲ = ۰$$

$$\therefore ۱ = \frac{۱}{۴} \text{ یعنی } ۱ = \pm \frac{۱}{۴}$$

$$(ج) ۱ = ۰ \text{ تو } ۱ = ۰ + ۱$$

$$۱ = ۰ + ۱ \text{ تو } ۱ = ۱ + ۰$$

$$۱ = ۰ - ۱ \text{ تو } ۱ = ۱ - ۰$$

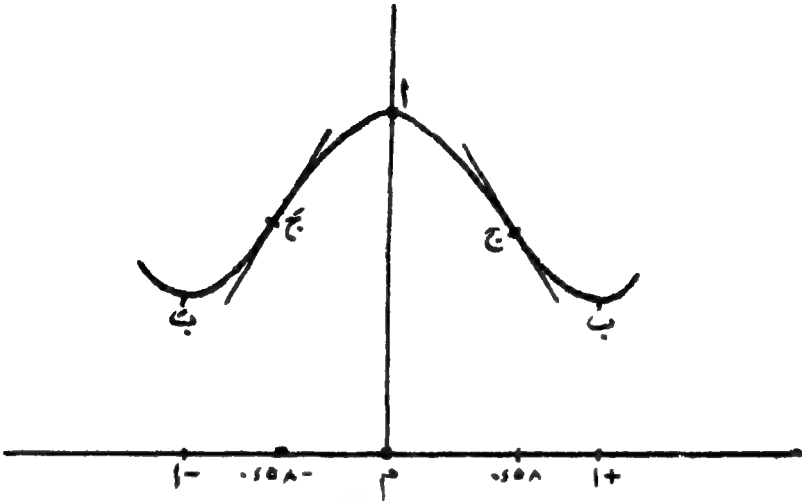
$$۱ = \frac{۱}{۴} + ۰ \text{ تو } ۱ = \frac{۱}{۴} + ۰ \text{ فرما } \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} = ۰$$

$$\text{اور } ۱ = \frac{۱}{۴} - ۰ \text{ تو } ۱ = \frac{۱}{۴} - ۰ \text{ فرما } \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۰$$

(د)	لا	ما	فرما فرلا	کیفیت	منہی کی سمت
	۰	۱۰۶۰+	۰	اعظم کا نقطہ	
	۰.۵۱±	۹۶۹۸+	۰.۶۳۰±		
	۰.۶۲±	۹۶۹۲+	۰.۱۶۶±		
	۰.۶۳±	۹۶۸۳+	۱۰.۹±		
	۰.۶۴±	۹۶۷۱+	۱۶۳۲±		
	۰.۶۵±	۹۶۵۶+	۱۶۵۰±		
	۰.۶۶±	۹۶۴۲+	۱۶۵۲±	عظم کا نقطہ	
	۰.۶۷±	۹۶۳۱+	۱۶۵۴±		
	۰.۶۸±	۹۶۲۶+	۱۶۴۳±		
	۰.۶۹±	۹۶۱۳+	۱۶۱۵±		
	۰.۷۰±	۹۶۰۴+	۱۶۰۸±		
	۱.۰±	۹۵۰+	۰		
	۱.۱±	۹۴۰±	۰.۶۹۲±	اقل کا نقطہ	

اس جدول میں تیرہ نقطوں کے محذو وغیرہ درج ہیں۔ عام طور پر اتنی زحمت اٹھانے کی ضرورت نہیں نقاط اعظم و اقل و عطف کے علاوہ اگر ان کے قریب کے تین چار اور نقطے دریافت کر لیے جائیں تو کافی ہوگا۔

جدول میں لاکھ قیمتیں ± اور ان کے تناظر فرما فرلا کی قیمتیں ± لکھی گئی ہیں۔ اس کا یہ مفہوم ہے کہ اگر لاکھ قیمت + ۰.۱ ہے تو اس کے تناظر فرما فرلا کی قیمت - ۰.۶۰ ہے اور اگر لا = - ۰.۱ ہے تو فرما فرلا = + ۰.۶۰۔ لیکن فرما فرلا کی قیمت ہر دو صورتوں میں - ۰.۶۹ ہے۔



شکل ۲۴

شکل ۲۴ کے مطالعہ سے واضح ہو گا کہ لا = ۰ (یعنی مبداء) پر $\frac{1}{x^2}$ اور ما کی قیمت اعظم اور = ۱۰ پھر جیسے جیسے لا کی قیمت مثبت سمت میں بڑھتی ہے ما کی قیمت گھٹتی ہے $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت منفی اور عدداً بڑھتی جاتی ہے۔ $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت منفی اور عدداً گھٹتی جاتی ہے۔ یہاں تک کہ لا = $+\frac{1}{10}$ = (۰.۵۵۸ تقریباً) پر پہنچ کر $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت = $-\frac{1}{10^2}$ = (-۰.۰۱ تقریباً) ہو جاتی ہے جو عدداً سابقہ اور بعد کو آنے والی قیمتوں سے بڑی ہے۔ یہاں $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت عدداً گھٹ کر لیکن جبری نقطہ نظر سے بڑھ کر صفر ہو جاتی ہے۔ یہاں تک وہ منفی مقدار تھی اب مثبت ہو جاتی ہے اور اس کے بعد جیسے جیسے لا کی قیمت بڑھتی ہے وہ عدداً اور نیز جبری نقطہ نظر سے بڑھتی جاتی ہے۔ یعنی اعظم کے نقطہ سے عطف کے ایک نقطہ ج تک $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت منفی اور بالآخر صفر ہوتی ہے اس کے بعد وہ مثبت ہوتی ہے۔ یعنی کے جس حصہ میں وہ منفی ہے وہ حصہ نیچے کی جانب متغیر ہے اور جس حصہ میں وہ مثبت ہے وہ اوپر کی جانب متغیر ہے۔

نقطہ عطف پر پہنچنے کے بعد $\frac{1}{2}$ فریاء کی قیمت منفی ہی رہتی ہے۔ لیکن عدد $\frac{1}{2}$ گھٹتی جاتی ہے حتیٰ کہ $\frac{1}{2} = 0$ اور $\frac{1}{2}$ پر پہنچ کر وہ صفر ہو جاتی ہے۔ یہاں سے وہ آگے چل کر مثبت ہو جاتی ہے۔

طالب علم لاکھ منفی قیمتوں کے متعلق بھی اس طرح شکل کے مطالعہ سے نتائج قلبند کر سکیں گے۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ $\frac{1}{2} = 0$ ۔ $\frac{1}{2} = 0$ اور $\frac{1}{2} = 0$ ۔ نقطہ $\frac{1}{2} = 0$ پر اعظم ہے اور $\frac{1}{2} = 0$ پر اقل اور $\frac{1}{2} = 0$ پر اس کا نقطہ عطف ہے۔

اس شکل کی ترسیم بھی کھینچو۔

(۲) مندرجہ ذیل منحنیوں کو مصرعہ بالا طریقہ سے مرتب کرو:

(۱) $\frac{1}{2} = 0$ جواب [اعظم (۱، ۳) اقل (۱، ۳) نقاط عطف (۰، ۰)] اور $\left[\frac{1}{2} \right] \pm \left[\frac{1}{2} \right]$

(ب) $\frac{1}{2} = 0$ جواب [اعظم (۰، ۲) اقل (۰، ۱)]

۹۔ چال رفتار اور اسراع کی تفرقی سروں یا مشتقوں

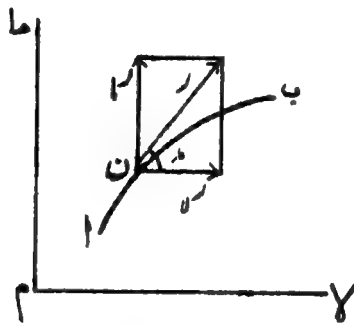
کے ذریعہ تعبیر۔ طالب نے حرکیات کی ابتدائی کتابوں میں پڑھا ہوگا کہ اگر کوئی ذرہ خط مستقیم یا منحنی مدار میں مساوی فاصلے مساوی وقتوں میں طے کرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس کی چال مستقل یا یکساں ہے۔ چال کی تعین مدت مقررہ میں طے شدہ فاصلہ کو مدت مقررہ پر تقسیم کرنے سے ہوتی ہے۔ اگر ذرہ کی چال یکساں نہ ہو تو کسی مقام پر اس کی تعین ذیل کے ضابطے سے ہوتی ہے:-

$$\text{چال} = \left[\frac{\text{منہ}}{\text{منہ}} \right] = \frac{\text{فر}}{\text{زو}}$$

جس میں صف لا وہ فاصلہ ہے جو ذرہ اپنے مدار (خطِ مستقیم یا منحنی) میں مقررہ نقطہ سے وقت صف و میں طے کرتا ہے۔ واضح ہو کہ چال ہمیشہ ایک مثبت مقدار ہوتی ہے۔ لیکن رفتار ایک سمتی مقدار ہے اور اس میں (۱) چال (۲) سمت اور (۳) جانب یعنی سمت کا مثبت یا منفی مفہوم یہ تینوں امور مضمر ہیں۔ اگر ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو اس کی رفتار کسی آن میں

$$r = \frac{\text{نہا}}{\text{مف و}} = \frac{\text{مف س}}{\text{مف و}} = \frac{\text{فرس}}{\text{د}}$$

جس میں صف س وہ فاصلہ ہے جو ذرہ صف و وقت میں طے کرتا ہے اور یہ مثبت ہے یا منفی بلحاظ اس امر کہ ذرہ خطِ مذکور کے مثبت یا منفی جانب کو حرکت کرتا ہے۔ اگر ذرہ ایک مستوی منحنی ا ب میں حرکت کرتا ہے (دیکھو شکل ۲۵) تو



شکل ۲۵

نقطہ ن پر اس کی رفتار لا اور ما دو متعینہ محوروں کی سمتوں میں تحلیل کی جاتی ہے۔

اگر رفتار کا سمتی محور لا کے ساتھ زاویہ طہ پر مائل ہے تو

محور لا کی سمت میں اس کا جزو ترکیبی $r \cos \theta$ = رجم طہ

اور ما $r \sin \theta$ = رجب طہ

ان اجزاء ترکیبی کی رقوموں میں ر کی مقدار $\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$

اور ر کی سمت یعنی زاویہ طہ = مس^۱ $\frac{ر۱}{ر۲}$
 لہذا اور ر۱ کی علامت کے لحاظ سے جانب کا مفہوم دریافت ہوتا ہے۔
 اسراع بھی ایک سمتی مقدار ہے اور اس کی تعریف وقت کے لحاظ سے رفتار
 کی شرح تبدیلی ہے۔ اگر ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو رفتار کی صرف
 مقدار اور جانب حرکت (مثبت یا منفی) میں تبدیلی واقع ہو سکتی ہے۔ ایسی صورتیں

$$\text{اسراع} = \frac{فر۱}{فر۲} = \frac{فر۱}{فر۲}$$

اگر حرکت مستوی منحنی میں ہو تو ذرہ کا حاصل مجموعی اسراع اس کے لا، ما کی
 سمتوں والے اسراعوں ($ل = \frac{فر۱}{فر۲}$ اور $ما = \frac{فر۱}{فر۲}$) کا سمتی
 حاصل مجموع ہے جو لا اور ما کی سمتوں میں بلحاظ وقت رفتار ر کی تبدیلی
 کی شرحیں ہیں۔ پس حاصل مجموعی اسراع کی مقدار

$$ل = ل + ل$$

اور اس کا زاویہ میلان محور لا کے ساتھ

$$فہ = مس^۱ \frac{ل}{ل}$$

واضح ہو کہ اسراع ہمیشہ منحنی مدار کی مقعر سمت میں واقع ہوتا ہے۔

اسراع کے ہماسی اور عمادی اجزاء ترکیبی۔ اکثر ایسے مسائل

میں جن میں ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے اس کے اسراع کو اس کے مدار
 کے ہماس اور عمادی سمتوں میں تحلیل کرنا مفید ہوتا ہے۔ چنانچہ اگر ذرہ کی
 چال رہے اور کسی نقطہ پر اس کے مدار کا زاویہ میلان طہ تو

$$ل = ر \text{ حجم طہ} \quad \text{اور} \quad ل = ر \text{ جب طہ}$$

چال کی تبدیلی کے تابع ہوتا ہے۔ اگر چال بڑھتی جاتی ہے تو ماسی جزو ترکیبی سمت حرکت میں مثبت ہے اور اگر چال گھٹتی جاتی ہے تو سمت حرکت میں منفی ہے۔

$$\text{اسراع کا ماسی جزو ترکیبی} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فرو}} = \frac{\text{فر}^2}{\text{فرو}}$$

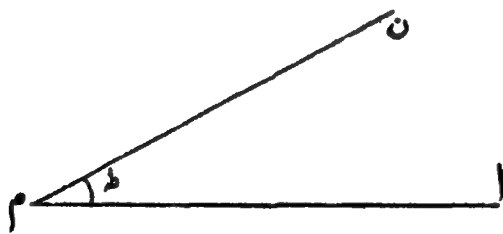
چال کی تبدیلی کے ساتھ یا تبدیلی بغیر حرکت کی سمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس سے صرف اسراع کا عمادی جزو ترکیبی (لے) پیدا ہوتا ہے۔ اس جزو کی سمت مار کے متعرج جانب ہوتی ہے۔ اس کا ضابطہ

$$\frac{\text{لے}}{\text{ص}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$$

جس میں ر = ذرے کی چال اور ص = نقطہ زیر بحث پر مار کا نصف قطر انحناء

زاویئی رفتار اور زاویئی اسراع - شکل ۲۶ میں بمقعر سمتی

(radius vector) م ن پر غور کرو جو خط م کے ساتھ زاویہ ط بنا رکھا ہے



شکل ۲۶

اور م مرکز کے گرد مستوی ا م ن میں گھوم رہا ہے۔ اس حرکت میں اگرچہ م ن کے کوئی سے دو نقطوں کی رفتار مساوی نہیں ہے، تاہم م ن کے گھومنے کی شرح سے ان تمام نقطوں کی رفتار متعلق ہو جاتی ہے۔ یہی وجہ زاویئی رفتار کا تصور پیش کیا گیا۔ خط م ن کی زاویئی رفتار سے مراد وقت کے لحاظ سے زاویہ ط کی تبدیلی کی

شرح ہے۔ ہم اس کے لیے علامت سے تجویز کرتے ہیں۔ پس

$$\text{سہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرو}}$$

اسی طریقہ پر زاویائی رفتار کی تبدیلی کی شرح زاویائی اسراع کہلاتی ہے۔ اس کے لیے ہم علامت سے تجویز کرتے ہیں اور

$$\text{عہ} = \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرو}} = \frac{\text{فرطہ}^2}{\text{فرو}^2}$$

مثال (۱) ایک ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے جس کی مساوات $s = 12t - 16t^2$ ہے۔ دریافت کرو کہ وہ کتنا فاصلہ طے کیا ہوگا اس کی رفتار کیا ہوگی اور اسراع کیا۔

حل۔ چونکہ $s = 12t - 16t^2$ ، رفتار $r = \frac{ds}{dt} = 12 - 32t$

اور $u = 0$ پر $r = 12 - 32t = 12 - 32 \times \frac{3}{4} = 12 - 24 = -12$ یعنی حرکت کے مخالف جانب

اسراع $a = \frac{dr}{dt} = -32$ جو ایک مستقل اور منفی مقدار ہے۔

مثال (۲) ایک ذرہ کی حرکت خط مستقیم کی مساوات $s = 1 + t^2$ ہے ثابت کرو کہ اس کا اسراع منفی اور رفتار کے کعب کے متناسب ہے۔

$$\text{چونکہ } s = 1 + t^2 \therefore r = \frac{ds}{dt} = 2t \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2t} \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4t^2}$$

$$\text{اور } \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4t^2} \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{4t^3} = -\frac{1}{2t^3} = -\frac{1}{2r^3}$$

$$= -\frac{1}{2r^3} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{1}{2r^5}$$

مثال (۳) ایک ذرہ منحنی ما = جب لا پر سے حرکت کرتا ہے، حرکت کی سمت

لا کی مثبت سمت ہے اور ذرہ کی چال را کائیاں فی ثانیہ ہے۔ اس کی رفتار کے لا اور ما والے اجزاء ترکیبی دریافت کرو اور نیز اس کے اسراع کے ماسنی اور عمادی اجزاء ترکیبی

محبوب کرو۔

چونکہ ذرہ کی چال رہے اس کی رفتار سمت لا میں (یعنی $ل$) = رجب ط = $\frac{ل}{\text{فرلا}}$
 اگر اس کی حرکت کے منحنی کے کسی مقام پر حرکت کی سمت محور لا کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے۔
 اس طرح $ل$ = رجب ط = $\frac{ل}{\text{فرلا}}$ اور مس ط = $\frac{ل}{\text{فرلا}}$ = $\frac{ل}{\text{فرلا}}$
 منحنی کی مسادات ما = جب لا ہے۔

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا} \therefore \text{مس ط} = \text{جم لا}$$

$$\frac{1}{\text{جم لا} + 1} = \frac{1}{\text{مس ط} + 1}$$

$$\text{اور جب ط} = \frac{1}{\text{مس ط} + 1} = \frac{1}{\text{جم لا} + 1}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{ل}{\text{جم ط}} = \frac{ل}{\text{جم لا} + 1}$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{ل}{\text{رجب ط}} = \frac{ل}{\text{جم لا} + 1}$$

ماسی اسراع $ل$ = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$ اور عادی اسراع $ل$ = $\frac{ل}{\text{مس}}$ جس میں مس نصف قطر انحناء ہے

ذرہ جس منحنی پر سے گزرتا ہے اس کی مسادات ما = جب لا ہے اور $\text{مس} = \frac{\left\{ \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 + 1 \right\}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}}$

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا اور اس لیے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{جب لا}$$

$$\therefore \text{مس} = \frac{\left\{ \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 + 1 \right\}}{\text{جب لا}}$$

$$\text{پس } \frac{ل}{\text{مس}} = \frac{\text{رجب لا}}{\left\{ \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 + 1 \right\}}$$

میشالیں

ذیل کی ہر مساوات محور لا پر بوقت و ایک ذرہ کا مقام ظاہر کرتی ہے۔
اس کی رفتار اور اسراع دریافت کرو اور بتاؤ کہ اس حرکت کی کیا خصوصیات ہیں:-

(۱) لا = ۲۰ و ۸ = ۲۸ جواب لا = ۲۸

(جگہ و = ۳)

(۲) لا = قو' جب π و جواب $r = قو' (\pi \text{ جم } \pi - \text{ جب } \pi \text{ و})$

$$1 = \overline{q}^{(n-1)} [\text{جب } \pi - \pi_2 \text{ حجم } \pi \text{ و}]$$

$$\frac{1}{9} + 5 = 5 \frac{1}{9} \quad (P)$$

جواب $= 3 - \frac{1}{2(9)}$

$$2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 12 =$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \frac{r}{r} + 9 + 1 = f$$

$$2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} - 12 =$$

(۴) ایک ذرہ منحنی مدار میں حرکت کرتا ہے جس کی متبدل مساواتیں (parametric equations)

لا = برجم ع (و) اور ما = رجب ع (و) - $\frac{1}{4}$ ج و ہیں

اس کی رفتار اور اسراع کی مقدار اور ان کی سختیں دریافت کرو اور بتاؤ کہ مارکس نوعیت کا
منہی ہے۔

نوٹ۔ اکثر اوقات سہولت کی خاطر منحنی کے نقطہ کے محدد ۱۱ اور ۱۲ ایک تیسرے متغیر یا مبطل

(parameter) کی شکل میں مساواتوں کے ذریعہ دیے جاتے ہیں۔ یہ مساواتیں تبدیلی کہلاتی

ہیں۔ یہاں اس مثال میں تبدل وقت وہی ہے۔ ملاحظہ ہو باب (۷)

[جواب ۱ = $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log (1 + \frac{1}{2})$]

رفتار کا زاویہ میلان محور لاکے ساتھ

$$ط = مس^1 (مس ع - \frac{ج و}{ر جمع ع})$$

1 = ج ' زلویہ میلان اسراع ذ = $\frac{\pi}{r}$ [انداز خط مکانی ہے۔

(۵) ایک ذرہ خط ناقص $\frac{14}{9} + \frac{21}{14} = 1$ پر سے موافق سمت سمیت حرکت کرتا ہے۔ دریافت کرو کہ کن مقامات پر اس اور سہ مساوی ہونگے۔

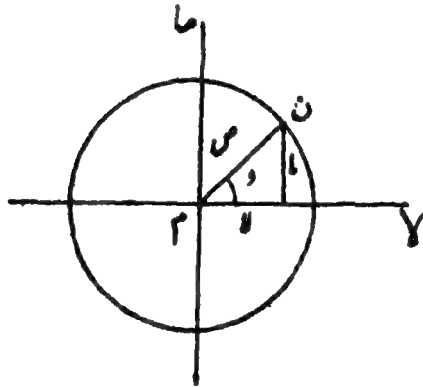
[جواب نقطوں $(14 = 9 + 5)$ اور $(17 = 9 + 8)$ پر]

(۶) ایک ہوائی جہاز افقی خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ اگر مبداء سے اس کا فاصلہ و گھنٹوں میں $(\frac{1}{4} و - 28 + 20)$ ہے تو بیتا اس کی رفتار $2 - 23 + 20$ ہے اور اسراع $4 - 28 + 20$ ہے اور وہ اپنی سمت حرکت بدلنے کے لیے آغاز پرواز سے ۲ اور ۱۰ گھنٹوں کے بعد ساکن ہو جاتا ہے۔

ساتواں باب

مبتدلی اور قطبی مساواتیں - علم ہندسہ میں ان کا استعمال

۱۔ منحنی کی مبتدلی مساواتیں - ڈھلان وغیرہ —
اکثر اوقات منحنی کے کسی نقطہ کے محدود لا اور ما بطور ایک تیسرے متغیر یا مبدل
کے تفاعلوں کے ظاہر کیے جاتے ہیں مثلاً بشکل
لا = ف (و) اور ما = فہ (و)



شکل ۲۷

و کی ہر ایک قیمت لا کی ایک قیمت اور ما کی قیمت دیتی ہے اور اس سے منحنی کے

ایک نقطہ کی تعیین ہو جاتی ہے۔ یہ مساواتیں منحنی کی مبتدلی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اگر ان مساواتوں میں سے کو مساقط کر دیا جائے تو منحنی کی مستطیلی (rectangular) مساوات حاصل ہوتی ہے۔ بطور مثال

لا = ص جم و اور ما = جب و دائرہ کی مبتدلی مساواتیں ہیں (دیکھو شکل ۲۷) جن میں و مبتدل ہے۔ کیونکہ اگر ان کے مربعوں کو جمع کیا جائے تو مساقط ہو جاتا ہے اور

$$لا^2 + ما^2 = ص^2 (جم و + جب و) = ص^2$$

جو دائرہ کی مستطیلی مساوات ہے۔ واضح ہے کہ اگر و کی قیمت صفر سے ۳۲ تک بدلے تو نقطہ ن (یعنے لا، ما) دائرہ کا مکمل محیط مرتسم کرتا ہے۔

چونکہ ما تفاعل ہے و کا اور و تفاعل (متکلب) ہے لا کا پس

$$\frac{فر لا}{فر و} = \frac{فر ما}{فر و} = \frac{فر و}{فر و}$$

یعنے $\frac{فر ما}{فر و} = \frac{فر و}{فر و} = \frac{فر و}{فر و}$ منحنی کا دحلان نقطہ ن (لا، ما) پر

اس ضابطہ سے ایسے منحنی کا جس کی مبتدلی مساواتیں دی گئی ہوں دحلان معلوم کر لیا جاتا ہے مثال (۱) اگر ذہ کسی ناقص کا خارج المکرز زاویہ ہے تو (۱) بتاؤ کہ

ما = ا جم ذہ اور لا = ب جب ذہ اس کی مبتدلی مساواتیں ہیں۔ (ب) اس ناقص کے ایسے نقطہ پر جس کے لیے ذہ = ۵۰ خطوط ما و عماد کی مساواتیں دریافت کرو اور اس کے زیر ما و اور زیر عماد کے طول معلوم کرو۔

حل (۱) م کو مرکز مان کر ناقص کے نصف محورِ غلطہ و نصف محورِ اقل لا اور

ب نصف قطر کے دائرے کھینچو۔ یہ ناقص کے معاون (auxiliary) دائرے ہونگے۔ (دیکھو شکل ۲۸)۔ ایک ہی نصف قطر م ج ب کے نقطوں ب اور ج

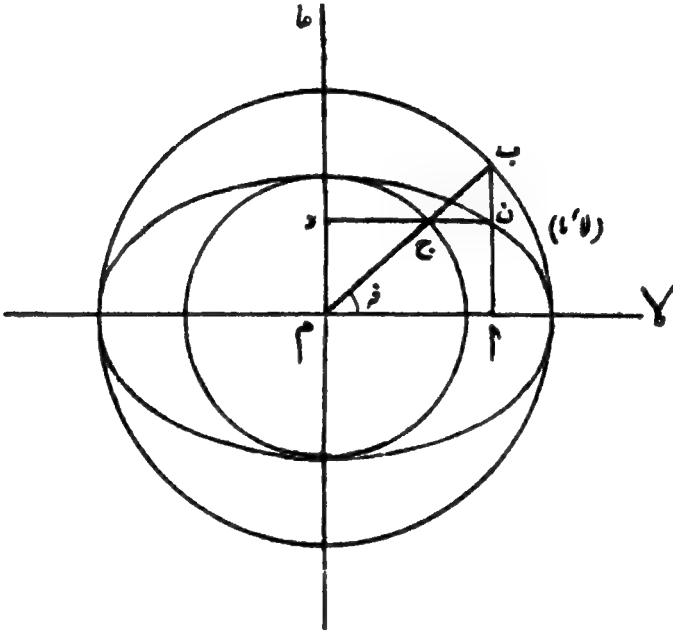
میں سے علی الترتیب ب ن ۲ اور د ج ن خطوط م ما اور م لا کے متوازی کھینچو۔ ان کے تقاطع کا نقطہ ن ناقص پر واقع ہوگا۔ اس کے محد لا، ما فرض کرو۔

$$چونکہ لا = م ۲ = م ب جم ذہ = ا جم ذہ$$

اور $1 = \sin \theta = \sin \phi = \sin \psi$ جب نہ

$\theta = \phi = \psi$

اس لیے $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \phi} = \frac{1}{\sin \psi}$ جب نہ



شکل ۲۸

پس $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \phi} + \frac{1}{\sin \psi}$ جو ناقص کی مستطیلی مساوات ہے۔

(ف) = ناقص کا خارج مرکزی زاویہ نقطہ ن پر)۔

(ب) چونکہ منحنی کی مبتدی مساواتوں میں فہ مبتدل ہے

$\frac{r}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \phi} + \frac{r}{\sin \psi}$ جب فہ

پس $\frac{r}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \phi} + \frac{r}{\sin \psi}$ = منحنی کا ڈھلان اس کے

کسی نقطہ پر = م اگر فہ = م تو اس سے متعلق نقطہ تماس کے لیے

اور مخفی کا دھواں م = $\frac{1}{2} \times 1$ اور $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ ب = $\frac{1}{2}$

پس خطِ ماس کی مساوات $b + la = 7a$ ہے

اور عماد کی مساوات $۴۶ (۱۱۱-ب۱) = ۷-ب۱$ ہے

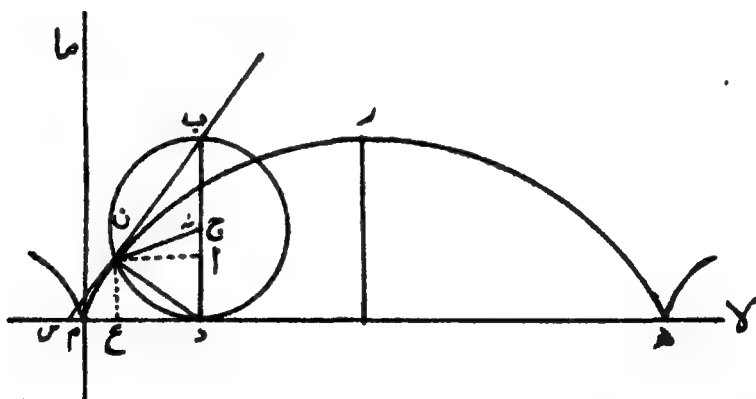
اس طرح زیر ماس کا طول = $\frac{1}{p}$ ب $\sqrt{1 - (\frac{1}{p})^2} = -\frac{1}{p}$ و $\sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}$

اور زیر عماد کا طول $\frac{1}{4} \text{ ب } 17 = (\frac{17}{4}) - \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ ہے

مثال (۲) (۱) طہ کو مبتدل مان کر خطِ تدبیر (cycloid) کی

مبتدی مساواتیں حاصل کرو اور (ب) نقطہ لا، ما پر جہاں طہ = طہ منحنی کے زیر مساوی
زیر عماد اور عماد کے طول دریافت کرو۔

حل (۱) فرض کرو ثابت اساس م لا پر دائرہ دن ب (مرکز ج)
مبدأ م سے شروع کر کے مید سے جانب کو بغیر پھسلے لڑھکتا ہے (ملاحظہ ہو شکل ۲۱)



شکل ۲۹

اس حرکت میں اس کے محیط کا کوئی نقطہ نہ جو منحنی مرتسم کرتا ہے خطِ دیر کھاتا ہے۔

جب دائرہ لڑھکتے ہوئے محمولہ بالا شکل کی وضع میں پہنچتا ہے تو اس کا نقطہ د
اساس کو چھوتا ہے۔ اور دائرہ کی قوس دن کا طول اساس کے جزو م د کے مساوی
ہے۔ اگر زاویہ د ج ن = طہ اور دائرہ کا نصف قطر = ۱ تو
لا = م = ع = م د - ع د = ۱ طہ - ۱ جب طہ = ۱ (طہ - جب طہ)
اور ما = ن = ع = د ج - ۱ ج = ۱ - ۱ - ۱ جم طہ = ۱ (۱ - جم طہ)
خط تدویر کی یہ مبتدی مساواتیں ہیں۔ اور طہ دائرہ کے لڑھکنے کا زاویہ طہ مبتدل
ہے۔ م = ۳۲ = ۱ خط تدویر کی ایک کمان کا اساس کہلاتا ہے۔ اور ر
اس کا راس۔ طہ کو ساقط کرنے سے مستطیلی مساوات

$$لا = ۱ قوس جم (۱ - \frac{طہ}{۱}) - \sqrt{۱ - ۱ - ۱ طہ}$$

(ب) منحنی کی مبتدی مساواتوں کو بلحاظ طہ تفریق کرنے سے

$$\frac{فرلا}{زط} = ۱ (۱ - جم طہ) اور \frac{فرما}{زط} = ۱ جب طہ$$

پس $\frac{فرما}{زط} = \frac{جم طہ}{۱ - جم طہ} = م = م$ منحنی کا ڈھلان اس کے کسی بھی نقطہ پر

$$جبکہ طہ = طہ = ما = م = ۱ (۱ - جم طہ) = م = م = ۱ - جم طہ$$

$$زیر حماس س ع = ۱ (۱ - جم طہ) زیر عماد ع د = ۱ جب طہ$$

$$اور عماد دن = ۱ طہ (۱ - جم طہ) = ۲ ۱ جب طہ$$

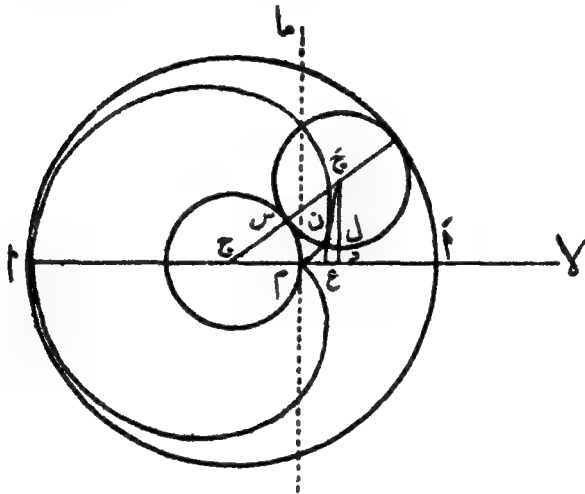
منحنی کے افقی اور انتصابی خطوط حماس کے نقاط تماس کی تعیین کے لیے

علی الترتیب $\frac{فرما}{زط} = ۰$ اور $\frac{فرلا}{زط} = ۰$ کو حل کر کے طہ کی قیمتیں معلوم کرنا چاہیے۔

مثال (۳) خط صنوبری (cardioid) کے قرن (cusp) کو
مبدأ اومان کر اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والے خط مستقیم کو اگر محور کاما میں
اور اس کے علی التوائم خط کو محور صا (دیکھو شکل ۳۲) تو منحنی کی مبتدی مساواتیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \cos \theta - \frac{1}{r_2} \cos \phi \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \sin \theta - \frac{1}{r_2} \sin \phi \end{array} \right.$$
 اور لکھی جاسکتی ہیں، جن میں ϕ مبتدل ہے۔ منحنی کے افقی و انتصابی محاسوں کے نقاط تماس دریافت کرو۔

منحنی ۲ م ن خط صنوبری ہے۔ یہ ایک برتدویر (epicycloid) ہے جس کو ج مرکز والے دائرہ کے محیط کا نقطہ ن مرتسم کرتا ہے جبکہ یہ دائرہ مساوی نصف قطر اور ج مرکز والے دائرہ کے محیط پر سے بغیر پھیلے لڑھکتا ہے۔



شکل ۳۰

مں ان دائروں کا نصف قطر ہے اور ج ج م = زاویہ ϕ دی ہوئی مساواتوں کا مبتدل ہے۔ اگر ن ابتداء م سے منطبق تھا تو اوپر والے دائرہ کے لڑھکنے سے قوس س ن = قوس س م اور چونکہ دونوں دائرے مساوی ہیں اس لیے زاویہ س ج ن = زاویہ س ج م = ϕ مں اور ϕ کی رقموں میں خط صنوبری کے نقطہ ن کے متحدہ آسانی معلوم

اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے $ج = ۱ - \frac{۱}{۲}$ یا $ج = ۰$ یا ۱۲۰ یا ۲۴۰ ۔
انتصابی ماسوں کی تعیین کے لیے $\frac{فرق}{درجہ} = ۰$ اس لیے - جب $ج = ۰$ جب $۲ = ۰$ ۔

∴ ۲ جب ط جم ط - جب ط = ۰ پس جب ط = ۰ اور جم ط = $\frac{1}{4}$
 ∴ ط = ۰ یا ۹۰ یا ۱۸۰ یا ۲۷۰

واضح ہو کہ مشترک اصل (root) طہ = کو مسترد کر دینا چاہیے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں $\frac{جزا}{طہ}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صفر ہو جاتے ہیں اس لیے مخفی کا اطلاق غیر معین ہو جاتا ہے۔ مخفی کی دی ہوئی تبدیلی مساوات سے ظاہر ہے کہ لا = ما = . جبکہ طہ = . یہ نقطہ م قرن کہلاتا ہے۔

طہ کی دوسری قیمتیں دی ہوئی مساواتوں میں تعویض کرنے سے

افقی حماسوں کے نقاطِ تماس = $(-\frac{r}{p}, \pm \frac{r}{p}, \frac{r}{p})$

اور انتصابی $(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \pm 1 \frac{1}{n}) =$

شکل سے واضح ہے کہ انتصابی ماس باہمیچ منطق ہو کر ایک دوہرا خط ماس پیدا کرتے ہیں۔

یہ تمام خطوط ماہی شکل ۳۲ میں بتائے گئے ہیں۔

نوٹ - شکل ۳۱ کے مطالعہ سے ظاہر علم نہایت آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتا ہے کہ خط صنوبری آتش منحنی (caustic curve) ہے جبکہ میدان نور ۱ پر واقع ہوتا ہے اور شعاعیں ۱۱ قطر والے دائرہ کے محیط پر سے منعکس ہوتی ہیں۔

مشائیں

مندرجہ ذیل منحنیوں کے مصرعہ نقطوں پر کے خطوط تماس و عماد کی مساویاتیں

لکھو اور ان کے زیر ماس اور زیر عباد کے طول دریافت کرو :-

$$\left. \begin{array}{l} \text{جواب} \left\{ \begin{array}{l} \text{ماس کی مساوات } ۳ = ۳ - ۱۲ + ۱۱ \\ \text{عاد } ۳ = ۱ - ۱۱ + ۱۲ \\ \text{زیر ماس کا طول } = \frac{1}{3} \\ \text{زیر عاد } = ۱ \end{array} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} (۱) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ نقطہ } ۳ = \frac{\pi}{4} \text{ پر} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (۲) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ نقطہ } ۳ = \frac{\pi}{4} \text{ پر} \end{array} \right. \\ (۳) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \\ ۱۲ = ۳ \end{array} \right. \\ (۴) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \\ ۱۲ = ۳ \end{array} \right. \end{array}$$

منحنی $\left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ + ۲ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ + ۲ \text{ جب } ۳ \end{array} \right\}$ کے افقی ماسوں کے نقاط تماس $(۲, ۲)$ اور $(۲, ۸)$ ہیں۔
 اور انتہائی ماسوں کے $(۳, ۳)$ اور $(۳, ۸)$ ہیں۔
 ذیل کے منحنی ترسیم کرو اور ان کے افقی و انحصاری ماسی خطوط کے نقاط تماس دریافت کرو۔
 $(۵) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ \text{ جب } ۳ \end{array} \right\}$

$$(۶) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-2}{3} = ۱۱ \\ \frac{1}{3} = ۱۲ \end{array} \right\}$$

$$(۷) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ \text{ جب } ۳ \end{array} \right\}$$

ذیل کے منحنیوں کے کسی بھی نقطہ پر کے (۱) زیر ماس (ب) زیر عاد (ج) ماس (د) عاد کے طول دریافت کرو:-

$$(۸) \left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ و } ۳ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ و } ۳ \text{ جب } ۳ \end{array} \right\} \text{ جواب } \left\{ \begin{array}{l} (۱) \text{ ماس } ۳ \text{ و } (ب) \text{ ماس } ۳ \\ (ج) \text{ عاد } ۳ \text{ و } (د) \text{ عاد } ۳ \end{array} \right\}$$

(۹) درتدویر (hypocycloid)

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱۱ = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ و } ۳ \text{ جب } ۳ \\ ۱۲ = ۳ \text{ جب } ۳ \text{ و } ۳ \text{ جب } ۳ \end{array} \right\} \text{ جواب } \left\{ \begin{array}{l} (۱) \text{ ماس } ۳ \text{ و } (ب) \text{ ماس } ۳ \\ (ج) \text{ عاد } ۳ \text{ و } (د) \text{ عاد } ۳ \end{array} \right\}$$

(۱۰) پتاسمخنی (folium)

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^3}{x^2+1} &= 1 \\ \frac{x^3}{y^2+1} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

(۱۱) زائدی لولبی (Hyperbolic spiral)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \theta \\ \frac{1}{r} &= \theta \end{aligned} \right\}$$

۱۔ مبتدی مساواتیں - دوسرے مشتق کی تعیین۔

۱۔ کے شروع میں بتایا گیا تھا کہ

$$M = \frac{r}{r'} = \frac{r}{\frac{r}{r''}} = r'' = \text{نقطہ ن یعنی (لا'ما) پر سمخنی کا دھلان۔}$$

اس کو ضابطہ (۱) کہو۔
واضح ہے کہ $\frac{r}{r'}$ جو ما کا بلحاظ لا پہلا مشتق ہے ضابطہ (۱) سے وکافتال
پس اگر $M = \frac{r}{r'}$ (و) لکھیں تو اسی ضابطہ سے بجائے ما کے ما لکھنے سے

$$M = \frac{r}{r'} = \frac{r}{\frac{r}{r''}} = r'' = \frac{r''}{r'} \dots \dots \dots \text{ضابطہ (ب)}$$

اگر جیسا کہ ۱۔ کے شروع میں لکھا گیا تھا لا = ف (و)

توضیحی مثال - خط تدبیر } لا = (ط - جب ط) کے لیے

$$\left. \begin{aligned} M &= 1 \\ M &= 1 \end{aligned} \right\}$$

یعنی $\frac{r}{r'} = 1$ دریافت کرو۔

حل ۱۔ کی توضیحی مثال میں ہم نے دریافت کیا تھا کہ آئیے $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{جب طہ}{(۱-جم طہ)}$ اور $\frac{فرلا}{فرطہ} = \frac{لا (۱-جم طہ)}{(۱-جم طہ)}$ ۔

$$\text{تفرق کرنے سے } \frac{فرما}{فرطہ} = \frac{(۱-جم طہ) - جب طہ}{(۱-جم طہ)} = \frac{۱-جم طہ}{(۱-جم طہ)} = ۱$$

ضابطہ (ب) سے $ما = \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{لا (۱-جم طہ)}{لا (۱-جم طہ)} = ۱$ ۔ چونکہ $ما$ منفی ہے، منحنی نیچے کی طرف مقعر ہے جیسا کہ شکل ۳ سے ظاہر ہے۔

مثالیں

(۱) ذیل کے سواوں میں $\frac{فرما}{فرلا}$ اور $\frac{فرلا}{فرلا}$ کو مبتدل د کی رقموں میں دریافت کرو :-

(۱) $لا = ۱$ و $جم و = ما = جب و$

(ب) $لا = ۲$ و $(۱-جم و) = ما = ۳$ و $جم و$

(ج) $لا = جب و$ و $ما = جب و$

(د) $لا = جم و$ و $ما = جب و$

(۲) ثابت کرو کہ منحنی $لا = قط طہ$ و $ما = مس طہ$ کا کوئی نقطہ عطف

نہیں ہے۔ منحنی $لا = ۲$ و $جم طہ = ما = ۲$ و $جب طہ$ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ

کہ اس کا نقطہ اعظم (۰، ۱) ہے اور نقاط عطف $(\pm \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$ ہیں

(۴) منحنی لا = مس د' = ۱ = جب وجہ و کو مرتسم کرو اور بتاؤ کہ اس کا

نقطہ اعظم (۱' ۱/۴) ہے نقطہ اقل (۱- ۱/۴) اور نقاد عطف (۳۷- ۱/۴) اور (۰.۰) اور (۳۷' ۴۷)

(۵) برتدویر (epicycloid) } لا = ۱۳ و حجم ط - و حجم ۳ ط

ما = ۳ و جب ط - و جب ۳ ط

کو مرتسم کرو (جس میں ۱ نصف قطر والا دائرہ بغیر پھسلے ۲ نصف قطر والے دائرہ کے محیط پر لڑھکتا ہے اور مساواتیں بڑے دائرہ کے مرکز کو مبداء مان کر حاصل کی گئی ہیں) اور $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۱}$ اور $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۱}$ کو مبداء ط کی جہتوں میں دریافت کرو۔

[نوٹ - حریم کے مطالعہ سے طالب علم باسانی معلوم کر لے گا کہ یہ برتدویر آتش منحنی ہے جبکہ ۳ و نصف قطر والے دائرہ کے محیط پر سے متوازی شعاعیں منقطع ہوتی ہیں۔]

۳۔ منحنی کی قطبی مساوات - نیم قطر سمتی اور

خط حماس کا درمیانی زاویہ -

فرض کرو کہ قطبی متحدوں میں منحنی کی مساوات $س = ف (ط)$ ہے

ہم ثابت کریں گے کہ $مس پسا = \frac{س}{س}$ (۱)

جس میں $س = \frac{فرس}{فرط}$

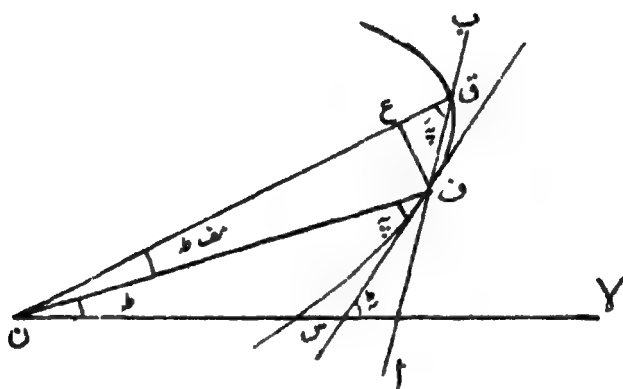
شکل ۳۲ میں ن ف منحنی ف ق کا مبداء ن سے کھینچا ہوا

نیم قطر سمتی ہے۔ ف کے قطبی متحدوں اور ط ہیں۔ ق منحنی پرف کے قریب ہی کا ایک نقطہ ہے اور اس کے قطبی متحدوں $س + مس$ اور $ط + مس$ ہیں۔ ف ق میں سے خط قاطع اب کھینچو اور ف ع نیم قطر سمتی ن ق پر عمود گراؤ۔ تب زاویہ ف ن ق = مس ط' ف ع = س جب مس ط

اور ن ع = سراجم ص ف ط

معنا: مس فق ع = مس پھ = $\frac{\text{ف ع}}{\text{ع ق}}$

$$\frac{\text{سراج مف ط}}{\text{سراج مف ط} + \text{سراج مف ط}} = \frac{\text{ن ع}}{\text{ن ق} - \text{ن ع}} =$$



شکل ۳۲

خیر قطر مستقیم N اور F پر کے خط FM سے منحنی F سے کا درمیانی زاویہ یہ ہے۔ اگر اب زاویہ M طے کھٹتے کھٹتے بطور انتہا صفر ہو جائے تو نقطہ Q بالآخر F کو پہنچ جائیگا۔ قاطع AB نقطہ F کے گرد گھوم کر بالآخر اپنی انتہائی وضع میں خط FM سے مل جائیگا۔ اور زاویہ $FQC = 90^\circ$ بطور انتہا یہ ہو جائیگا۔

پس مس پہ = نہیسا

$$\frac{\text{سراجب مفت}}{\text{س + مفت س - سراجب مفت}}$$

$$\frac{\text{نہا}}{\text{مف س} + \text{مف س}} = \frac{\text{سراجب مف ط}}{\text{مف ط} + \text{سراجب مف ط}}$$

یہاں پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$= \frac{\text{جب مف ط}}{\text{مف ط}} \cdot \frac{\text{جب مف ط}}{\text{جب مف ط}} = \frac{\text{جب مف ط}}{\text{مف ط}}$$

$$\text{بحالیکہ مف ط} = \frac{\text{جب مف ط}}{\text{مف ط}} = 1 \text{ اور نہا} = \frac{\text{جب مف ط}}{\text{مف ط}} = \frac{\text{جب مف ط}}{\text{مف ط}} = 1$$

$$\text{اور نہا} = \frac{\text{مف ط}}{\text{مف ط}} = \frac{\text{فرس}}{\text{زط}} = \text{فرس}$$

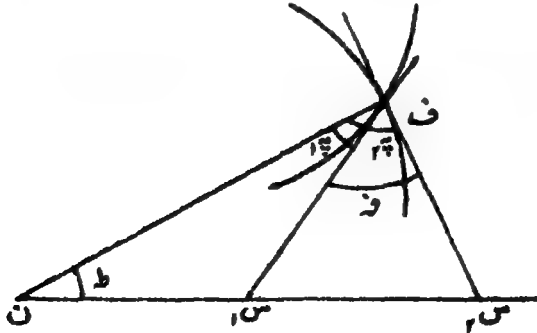
$$\therefore \text{مس پ} = \frac{\text{فرس}}{\text{زط}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = 1$$

منحنی کے ڈھلان کی قیمت قطعی محدودوں میں مثلث ن ف س میں ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ط} = \text{پ} + \text{فرس}$

$$\therefore \text{مس ن} = \text{مس} (\text{ط} + \text{پ}) = \frac{\text{مس ط} + \text{مس پ}}{1 - \text{مس پ}} = \frac{\text{مس ط} + \text{مس پ}}{1 - \text{مس پ}}$$

۲۔ دو منحنیوں کا زاویہ تقاطع جبکہ ان کی مساواتیں

قطبی محدودوں میں دی گئی ہوں۔ شکل ۳۳ میں فرض کرو کہ منحنیاں نقطہ ف پر تقاطع ہیں جہاں ان کے اور نیم قطر مستی کے امین زاویہ طلی الترتیب پ اور پم ہے۔



شکل ۳۳

پس نقطہ ف پر کے ماسی خط کی مساوات

$$\text{ماس جب (ط) + (پ) - (ط) = ماس جب پ ہے}$$

$$\text{جس میں ماس} = \text{ف (ط) اور پ} = \text{مس} = \frac{\text{مس}}{\text{فرط}} = \frac{\text{مس}}{\text{فرط}}$$

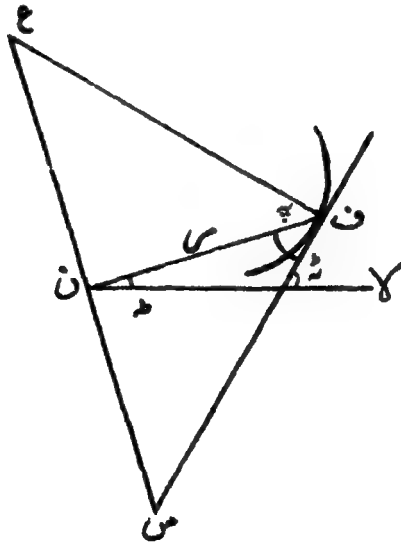
۶۔ قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد کے طول۔

شکل ۳۵ میں نقطہ ف پر ف س خط ماس ہے اور ف ع عماد۔ ع ن س
مبدأ ن میں سے نیم قطر سمتی ن ف کے علی التوائم کھینچا گیا ہے۔

پس ن س = نقطہ ف پر معنی کے قطبی زیر ماس کا طول
اور ن ع = قطبی زیر عماد کا طول

$$\text{مثلث ن ف س میں } ن س = \text{ماس پ} = \frac{\text{مس}}{\text{فرط}}$$

$$\text{اور مثلث ن ف ع میں } ن ع = \frac{\text{مس}}{\text{فرط}}$$



شکل ۳۵

[نوٹ:۔ س کے ساتھ جب ط بھی بڑھتا ہے تو $\frac{فرط}{سر}$ مثبت ہوتا ہے اور پ (جیسا کہ شکل ۱۲ میں کہینچا گیا ہے) زاویہ حادہ ہے۔ ایسی صورت میں زیر ماس ن س مثبت ہے اور مبداء ن پر سے اگر کوئی شاہد نیم قطر سمتی ن ف کا مطالعہ کر رہا ہو تو اس کے سیدھے جانب ناپا جاتا ہے۔ جب $\frac{فرط}{سر}$ منفی ہوتا ہے تو زیر ماس منفی ہوتا ہے اور مشاہد کے بائیں جانب ناپا جاتا ہے] قطبی مماس کا طول یعنی ف س اور قطبی عماد کا طول یعنی ف ع شکل کے مطالعہ سے آسانی معلوم کر لیے جاتے ہیں اس لیے کہ یہ دونوں قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر ہیں۔

توضیحی مثالیں۔

(۱) دائرہ سر = ۱۲ جم ط کے ایسے نقطہ پر کا ڈھلان دریافت کرو

جاں ط = $\frac{۳}{۴}$

$$\text{حل} \quad \frac{فرط}{سر} = ۱۲ \text{ جب ط} = ۳ \text{ پس مس پ} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \quad \frac{۱۲ \text{ جب ط}}{۲} = \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \quad \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \quad \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \quad \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

ایسے نقطہ کے لیے جس پر ط = $\frac{۳}{۴}$ مس پ = $\frac{۱}{۴}$ مم = $\frac{۳}{۴}$ = $\frac{۳}{۴}$

$$\text{پس ڈھلان} = \text{مس} = \frac{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۱}{۳}$$

(۲) ثابت کرو کہ خط مستقیم سر جب ط = ۱۲ اور خط مکانی س = لقط $\frac{۱}{۲}$

زاویہ ۴۵° پر باہد بیکر متقاطع ہیں۔

حل۔ شکل ۱۳ میں ل ف خط مکانی ہے جس کی قطبی مساوات

لقط $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

[واضح ہو کہ اس مساوات کے لیے محدودوں کا مبداء ماسک س ہے

اور زاویہ ط یعنی ۱ س ف موافق سمت ساعت ناپا جاتا ہے]۔

کتاب کی پہلی جلد صفحہ ۲۳۲ میں محروطیوں کے لیے عام قطبی مساوات

$$\frac{ل}{سر} = ۱ + زجم ط \text{ حاصل کی گئی تھی جس میں ل} = \text{س ل اور ز} =$$

قطبی کا خروج المرکز۔ مکانی کی صورت میں $l = 12$ اور $z = 1$

$$\text{پس } \frac{1}{r} = 1 + \text{جم} = 1 + 2 \times \frac{1}{r} \Rightarrow 1 - \frac{1}{r} = 2 \times \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow r = 1$$

پس نقطہ تقاطع پر زاویہ $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ کو کارتی دہی سر = $\frac{\pi}{4}$ جس میں $\frac{\pi}{4}$ صفر سے بڑا ہے کے زیر ماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو۔

حل۔ زیر ماس کا طول = $\frac{س^2}{فرس}$ اور زیر عماد کا طول = $\frac{فرس}{فرط}$
عملی تفرق کے لیے کوک سر = طہ کوک $\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{فرس}{فرط} = \frac{فرس}{فرط} = کوک \frac{1}{2} = کوک \frac{1}{2} = کوک \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{فرس}{فرط} = کوک \frac{1}{2} = کوک \frac{1}{2}$$

$$اور \frac{س^2}{فرس} = کوک \frac{1}{2} = کوک \frac{1}{2}$$

مثالیں

(۱) خط مکانی سر = اقطا طہ میں ثابت کرو کہ $\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

(۲) بتاؤ کہ ارشمیدس کے دہی سر = $\frac{\pi}{4}$ میں س پ = طہ اور اگر

طہ = $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{4}$ قوپہ کی قیمت علی الترتیب $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

(۳) ثابت کرو کہ کوکارتی دہی سر = $\frac{\pi}{4}$ میں پ مستقل ہے یعنی خط ماس نیم قطر سمتی کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے [اسی وجہ سے اس منحنی کو تساوی الزاویہ دہی بھی کہتے ہیں]

(۴) بتاؤ کہ خطوط صنوبری سر = $\frac{\pi}{4}$ (۱ + جب طہ) اور سر = $\frac{\pi}{4}$ (۱ - جب طہ) ایک دوسرے کو علی القوائم منقطع کرتے ہیں۔

(۵) ثابت کرو کہ $s = \text{وجب } ۲ ط = \text{اور } s = \text{وجم } ۲ ط$ منحنیوں کے تقاطع کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ = مس

(۶) مندرجہ ذیل منحنیوں کے جوڑوں کا زاویہ تقاطع نہ دریافت کرو۔

(۱) $s = ۲ ط$ ، $s = ۵$ وجب ط [جواب توس مس $\frac{\pi}{2}$]

(ب) $s = \text{وجب } ط$ ، $s = \text{وجب } ۲ ط$ [جواب مبدا پر صفر درجہ]

اور دوسرے دو نقطوں پر توس مس $\frac{\pi}{2}$]

(ج) $s = ۶$ جم ط ، $s = ۲ (۱ + \text{جم ط})$ [جواب $\frac{\pi}{3}$]

(۷) بتاؤ کہ متکافی لولبی $s ط =$ کے قطبی زیرعاس کا طول متقل ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ لولبی $s =$ وٹ کے ہر نقطہ پر (۱) عاس کا طول = عماد کا

طول اور (ب) زیرعاس کا طول = زیرعماد کا طول۔

(۹) ثابت کرو کہ چشہ یعنی یا ایئرٹن $s ط = \text{وجم } ۲ ط$ کے قطبی زیرعماد کا طول

- $\frac{s ط}{\text{وجب } ۲ ط}$ یا $\pm \text{وجم } ۲ ط ط$ ہے اور اس کے قطبی زیرعماد کا

طول - $\frac{\text{وجب } ۲ ط ط}{s ط}$ یا $\pm \text{مس } ۲ ط$ جب $۲ ط ط$ ہے۔

اکھوال باب

صغاریے اور تفرقے

۱۔ صغاریے۔۔ اعضاء میں ایسے متغیروں سے سابقہ پڑتا ہے جن کی انتہا صفر ہوتی ہے۔ ایسے متغیر صغاریے کہلاتے ہیں۔
[نوٹ۔ واضح ہو کہ ایک مستقل خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو صغاریہ نہیں ہے۔ صغاریہ لی جو تعریف اوپر لکھی گئی ہے اس میں اس کا بھی شائبہ نہیں ہے کہ صغاریہ کی قیمتیں صرف میوٹی ہی ہوتی ہیں۔ اگرچہ فی الواقع صغاریہ کی کوئی خاص قیمتوں پر جب غور کیا جاتا ہے تو یہ قیمتیں صفر کے قریب ہی کی ہوتی ہیں۔]
بہ طور مثال Δ اور δ صغاریے ہیں جبکہ $\frac{\Delta}{\delta}$ = $\frac{\Delta}{\Delta}$ = ۱۔

صدر صغاریہ (Principal Infinitesimal) —

دو صغاریے جب ایک دوسرے سے مربوط ہوتے ہیں تو ہم ان میں سے کسی ایک کو متغیر متبوع منتخب کر سکتے ہیں۔ جس کو بھی اس طرح متغیر متبوع منتخب کیا جاتا ہے اس کو صدر صغاریہ کہتے ہیں۔ چنانچہ تضادوں کے حاصل تقسیم (difference-quotient) $\frac{\Delta}{\delta}$ میں δ لا عموماً صدر صغاریہ تصور کیا جاتا ہے۔

صغاریوں کا اضافہ رتبہ۔۔ اگر δ اور δ دو صغاریے

ہوں اور $\frac{ن}{ص} = ج$ تو $ع$ اور $ب$ کے اضافہ رتبہ کی اس طرح تقریب کی جاتی ہے :-

(۱) اگر $ج = ۰$ تو $ب$ بہ نسبت $ع$ کے برتر یا بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

(۲) اگر $ج$ ایک محدود مستقل ہے جو صفر سے مختلف ہے تو $ب$ اور $ع$ ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

(۳) اگر $ج$ نامتناہی ہو تو $ب$ بہ نسبت $ع$ کے کمتر یا پست تر رتبہ کا ہے۔

مسئلہ (۱) اگر دو صغاریوں میں تفاوت ان میں سے کسی ایک کے صرف بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے تو ان کی نسبت کی انتہا اکائی ہے۔
یعنی $\frac{ن}{ص} = ۱$ بشرطیکہ $ب = ع = ص$ جس میں $ص$ بمقابل $ع$ یا $ب$ کے بلند تر رتبہ کا ہو۔

$$\text{ثبوت۔ نسبت } \frac{ن}{ص} = \frac{ع + ص}{ص} = ۱ + \frac{ع}{ص}$$

$$\text{اور } \frac{ن}{ص} = ۱ + \frac{ع}{ص}$$

لیکن $\frac{ع}{ص} = ۰$ چونکہ بمقابل $ع$ کے بلند تر رتبہ کا ہے۔ پس

$$\frac{ن}{ص} = ۱$$

اس مسئلہ کا ضد بھی صحیح ہے۔ یعنی اگر دو صغاریوں کی نسبت کی انتہا اکائی ہو تو ان میں تفاوت ان میں سے کسی ایک سے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہوتا ہے۔

$$\text{ثبوت۔ اگر یہ مانا جائے کہ } \frac{ن}{ص} = ۱$$

$$\text{تب } \frac{ع}{ص} = ۱ + \frac{ب}{ص} \text{ جس میں یہ صغاریہ ہے۔}$$

$$\text{یعنی } ب = ع + ع$$

پس یہ - عہ = عہ یہ
یہاں عہ یہ بمقابلہ عہ کے بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہے اور چونکہ یہ اسی
رتبہ کا ہے جو عہ کا ہے، عہ یہ بمقابلہ یہ کے بلند تر رتبہ کا ہے۔ اس لیے
عہ اور یہ میں تفاوت، ان میں سے کسی ایک سے بھی بلند تر رتبہ کا
صفاریہ ہے۔

مسئلہ (۲)۔ دو صفاریوں کی نسبت کی انتہا معلوم کرتے وقت
ہر ایک صفاریہ کی جگہ ایک دوسرا صفاریہ تعویض کیا جاسکتا ہے جو اس سے
بلند تر رتبہ کا تفاوت رکھتا ہے۔ یعنی

$$\frac{بہ}{عہ} = \frac{نہا}{عہ}$$

بشرطیکہ یہ - بہ = عہ بہ نسبت بہ کے بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہے اور
عہ - عہ = یہ بہ نسبت عہ کے بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہے۔

$$\text{ثبوت۔ نسبت } \frac{بہ}{عہ} = \frac{عہ + بہ}{عہ + عہ} = \frac{عہ}{\left(\frac{عہ}{بہ} + 1\right)} = \frac{عہ}{\frac{عہ}{عہ} + 1}$$

$$\text{اور } \frac{نہا}{عہ} = \frac{نہا}{عہ} \left(\frac{عہ + بہ}{عہ + عہ} \right) = \frac{نہا}{\frac{عہ}{بہ} + 1}$$

لیکن نہا عہ = کیونکہ بہ نسبت بہ کے بلند تر رتبہ کا صفاریہ ہے اور
اس لیے بہ کے بہ نسبت بھی۔ اسی طرح نہا عہ =

$$\text{پس } \frac{نہا}{عہ} = \frac{بہ}{عہ}$$

مثال (۱) صفاریوں بہ = عہ ۳ + عہ ۲ اور عہ کا اضافی رتبہ
دریافت کرو۔

$$\text{حل: نہا } \left(\frac{عہ ۳ + عہ ۲}{عہ} \right) = \frac{نہا}{عہ} \cdot عہ ۳ + عہ ۲ = عہ ۳$$

پس یہ اور $\frac{۳}{۴}$ دونوں ایک ہی رتبہ کے صغاریہ ہیں۔
مثال (۲) - صغاریوں یہ $\frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴}$ اور $\frac{۳}{۴}$ اضافی رتبہ دریافت کرو۔

$$\text{حل: } \frac{۳}{۴} = \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} \right) + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

اس لیے یہ نسبت $\frac{۳}{۴}$ کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔
مثال (۳) - بتاؤ کہ $\frac{۳}{۴}$ اور $\frac{۳}{۴}$ صغاریہ ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

$$\text{حل: } \frac{۳}{۴} = \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} \right) + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

پس دونو صغاریہ ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

مثالیں

(۱) صغاریوں یہ = حجم $\frac{۳}{۴}$ - ۱ اور $\frac{۳}{۴}$ میں بتاؤ کہ یہ کا بلند تر رتبہ ہے۔

$$(۲) \text{ یہ } = \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴} \text{ اور } \frac{۳}{۴} \text{ صغاریوں میں}$$

ثابت کرو کہ یہ نسبت تر رتبہ کا ہے۔

(۳) مندرجہ ذیل صغاریوں کی جڑیوں کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

(۱) یہ = جب $\frac{۳}{۴}$ مس $\frac{۳}{۴}$ جواب دونوں ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

(ب) یہ = ۱ - حجم $\frac{۳}{۴}$ جواب یہ کا رتبہ بلند تر ہے۔

(ج) ذہ = مس $\frac{۳}{۴}$ - $\frac{۳}{۴}$ جواب ذہ کا رتبہ بلند تر ہے۔

(د) $1 = (1 + 1 - 1 - 1)$ 'لا' جواب - دونوں ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

۲۔ صغاریہ اضافہ کا صدر جزو۔

جب تفاعل $1 = 1$ 'ف' (لا) اور اس کا مشتق

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \text{ف (لا)} \quad \text{ف (لا)} \quad \text{ف (لا)}$$

دیے جاتے ہیں تو تفاوتوں کے محل تقسیم کو اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \text{ف (لا)} + 1$$

جس میں $1 = 1$ جبکہ $1 = 1$ اس لیے

$$1 = 1 \quad \text{ف (لا)} + 1 + 1$$

اس لحاظ سے اضافہ $1 = 1$ دو صغاریہ رقموں میں تحلیل کیا جاتا ہے اس طور پر کہ پہلی رتسم بہ نسبت دوسری رقم کے کمتر رتبہ کا صغاریہ ہے۔ ان رقموں کا چنانچہ رتبہ ذیل کی تحریر سے بخوبی واضح ہو جاتا ہے:

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \text{ف (لا)} + 1 \quad \text{ف (لا)} + 1 = 1$$

کمتر رتبہ کا ہونے کی وجہ سے 'ف' (لا) $1 = 1$ بلحاظ $1 = 1$ کے بہت بڑا ہے بشرطیکہ 'ف' (لا) $1 = 1$ اور $1 = 1$ کافی چھوٹا ہے۔ میں وجہ وہ $1 = 1$ کے اضافہ کا صدر جزو کہلاتا ہے۔

۳۔ کسی تفاعل کے تفرقہ (Differential) کی تعریف

تفاعل $1 = 1$ 'ف' (لا) کا تفرقہ 'اس تفاعل کے مشتق

اور متبوع متغیر کے اضافہ کا حاصل ضرب ہے۔

۱ کے تفرقہ کی تعبیر علامت dy سے کی جاتی ہے۔

$$1 = 1 \quad \text{ف (لا)} \quad \text{ف (لا)}$$

یعنی (باستثناء اس صورت کے جبکہ $ف = لا$) تفرقہ تفاعل کے اضافہ کا صدارت جزو ہے۔

بلحاظ تعریف متبوع متغیر کا تفرقہ $فرلا = \frac{فر}{فرلا} (لا) = مفرلا$

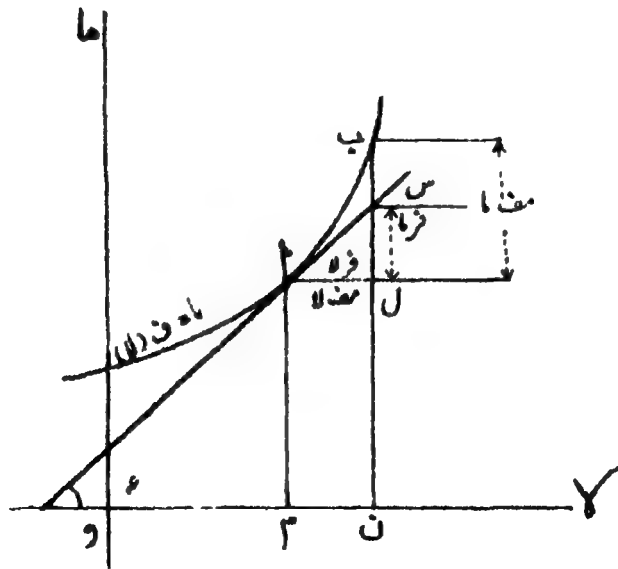
اس لیے $ما$ کے تفرقہ میں $مفرلا$ کے بجائے $فرلا$ لکھا جاسکتا ہے یعنی

فرما = $ف (لا) فرلا$

۳۔ تفرقہ کی ہندسی تعبیر۔

تسل ۳۔ میں منحنی $ما = ف (لا)$ پر نقطہ $ا$ کے محدود $لا$ ، $ما$

فرض کرو نقطہ $ب$ منحنی پر $ا$ کے قریب کا ایک نقطہ ہے اس کے محدود $لا + مفرلا$ ، $ما + مفرلا$ ہوں گے۔



شکل ۳۔

خط اس معنی کا نقطہ ۲ پر کا ماسی خط ہے جس کا زاویہ میلان محور
ولا کے ساتھ ۷۰ ہے۔ ال محور ولا کے متوازی کھینچا گیا ہے۔
ا م = ما اور ب ن = ما + مٹ
ب ن خط ماس اس کو نقطہ س پر منقطع کرتا ہے۔
محدود ب ن کا قطعہ ل س تفرقہ فرما کو تعبیر کرتا ہے۔ کیونکہ
ل س = مس = مٹ لا = مٹ (لا) فرلا = فرما
عموماً فرما اور مٹ ما غیر مساوی ہوتے ہیں بجز اس صورت کے جبکہ معنی
خط متقیم ہو۔

متواتر یا بلند تر رتبہ کے تفرقے فرما = مٹ (لا) فرلا کا تفرقہ
ما کا دوسرا تفرقہ کہلاتا ہے۔ اور علامت فرما سے اس کی تعبیر
کی جاتی ہے۔ اس کی قیمت اس طرح حاصل ہوتی ہے۔
چونکہ فرما = مٹ (لا) فرلا

پس $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \left[\frac{\text{مٹ (لا) فرلا}}{\text{فرلا}} \right] = \text{مٹ (لا) فرلا}$

اس لیے کہ فرلا متغیر لا کا کوئی تفاعل نہیں ہے

ن۔ فر [فرما] = [مٹ (لا) فرلا] فرلا

یہ فرض کر کے کہ دونوں فرلا مساوی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے:

فرما = مٹ (لا) فرلا

دو سے بلند تر رتبہ کے تفرقے بھی اس کے مائل طریقہ سے حاصل ہوتے ہیں۔ چنانچہ
ما کان - واں تفرقہ

فرن ما = مٹ^(ن) (لا) فرلان

مثال (۱) ما = $\frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2 - \text{لا}}$ کا تفرقہ یعنی فرما دریافت کرو

$$\text{حل فرما} = \frac{2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} =$$

مثال (۲) مساوات رجم طہ - رجب طہ = ۰ دی جاتی ہے فرر

دریافت کرو۔

حل۔ علی تفرق سے ۲ فرر رجم طہ - رجب طہ فرط - ۳ رجم طہ فرط =

یعنی فرر (۲ رجم طہ) = (رجب طہ + ۳ رجم طہ) فرط

$$\therefore \text{فرر} = \frac{(\text{رجب طہ} + ۳ \text{ رجم طہ})}{۲ \text{ رجم طہ}} \text{ فرط}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل تفاعلوں کا پہلا تفرقہ دریافت کرو:

$$(۱) \quad \frac{2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}(2-2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = ۱$$

$$(۲) \quad \frac{\text{قط لا}}{\text{قط لا} + ۱} = ۱$$

$$(۳) \quad \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} + ۱) \text{ لوک لا}} = ۱$$

$$(۴) \quad \text{ف (و)} = \text{واجب و} \quad \text{جواب فز (و)} = \text{واجب و} \quad \text{جواب فز (و)} = \text{واجب و} \quad \text{جواب فز (و)} = \text{واجب و}$$

$$(۵) \text{ فہ (س)} = (\text{لوک س} + ۱) \text{ س}$$

$$\text{جواب فہ (س)} = (\text{لوک س} + ۱) \text{ س}$$

$$\left[\frac{۱}{۱ + \text{لوک س}} + (\text{لوک س} + ۱) \right] \text{ فرس}$$

$$(۶) \text{ مساوات لا}^۲ + ۱۱ لا + ۱۲ = ۱۰ \text{ دی جاتی ہے۔ بتاؤ کہ}$$

$$\text{فرما} = \frac{(۱۱ + لا) \text{ فرلا}}{لا + ۱۲}$$

$$(۷) \text{ ما (۱ + مس لا)۔ جب لا} = ۰ \text{ بتاؤ کہ فرما} = \frac{\text{جم لا۔ ماقط لا}}{۱ + مس لا} \text{ فرلا}$$

$$(۸) \text{ ر۔ لا ققط} \frac{۱}{۲} = ۰ \text{ ثابت کرو کہ فرر} = \frac{\text{لققط} \frac{۱}{۲}}{\text{مس} \frac{۱}{۲}} \text{ فرطہ}$$

۲۔ تفرقہ کا اطلاق بطور تقریبی قیمت۔ چونکہ تفرقہ تعامل کے اضافہ کا صدر جزو ہے اس لیے وہ اضافہ کی تقریبی قیمت کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ تفرقہ کے اس طرح استعمال کرنے میں یہ فائدہ ہے کہ وہ عموماً اضافہ کی بہ نسبت زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت ہو سکتا ہے اور اس کی تشکیل بھی زیادہ سادہ ہوتی ہے۔

مثال (۱) ما = لوک لا مس اگر لا کی قیمت ۵ سے بل کر ۱۵ ہو جائے
ما کا اضافہ دریافت کرو۔

$$\text{حل: مت ما} = \text{لوک} \frac{۱}{۵} - \text{لوک} \frac{۱}{۱۵} = \text{لوک} \frac{۵}{۱۵} = \text{لوک} \frac{۱}{۳} = ۱۵.۲$$

$$۰.۹۱۹۸ = ۰.۹۰۰۰۸۶ \times ۲.۵۳۰ = ۱۵.۲ \text{ لوک} \frac{۱}{۳} =$$

اگر ما = لوک لا کا تفرقہ معلوم کیا جائے تو فرما = $\frac{۱}{۲}$ فرلا = $\frac{۱}{۲} (۱ + ۰.۹۲)$ = ۰.۹۲ جس سے ظاہر ہے کہ فرما اس مثال میں مت ما سے صرف بقدر ۱ فی صد بڑا ہے۔
مت لا کی کتہ قیمتوں کے مت ما اور فرما میں سے بھی زیادہ بہتر تقریب پایا جاسکتا ہے۔
مثال (۲) ایک سادہ رتاقص ایک گھنٹہ میں ۳۰ ثانیہ زیادہ کی خطا بتاتا ہے۔ اس کے طول میں کتنا فی صد اضافہ کرنا چاہیے تاکہ وہ صحیح وقت بتائے؟
حل۔ سادہ رتاقص کے وقت دھڑان بہتر از کا مضابطہ $۲۲ = \frac{۱}{۲} \left[\frac{۱}{۲} \right]$ ہے

جس میں ل اس کا طول اور ج جائزہ ارض ہے۔

$$\text{عل تفرق سے} \quad \text{فرو} = \frac{\pi}{\text{ل}} \quad \text{فرل}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرل}}{\text{ل}} = \frac{1}{2} = \frac{\text{فرو}}{2}$$

چونکہ رقا ص ایک کامل مدت دوران کا $\frac{3}{4 \times 40} = \frac{1}{1200}$ حصہ بڑھ کر بتاتا ہے

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{فرو}}{2} = \frac{1}{1200} + \frac{\text{فرل}}{2}$$

$$\therefore \quad \text{فرل} = \frac{1}{400} + \frac{1}{1200} = 0.0016$$

اس لیے رقا ص کا طول بفر ۱۶ و فی صد بڑھایا جانا چاہیے۔
مثال (۳)۔ آواز کی رفتار ہوا میں تیش کے لحاظ سے حسب ضابطہ ذیل
پہنتی ہے :

سمت = سمت (۱ + سمت) جس میں سمت اور سمت عملی الترتیب
صفر درجہ مٹی اور ت درجہ مٹی پر کی رفتاریں ہیں اور سمت ایک مستقل ہے۔
اگر سمت کی پیمائش میں نصف فی صد کی خطا واقع ہو تو بتاؤ کہ رفتار میں
تقریباً کیا فی صد خطا محسوب ہوگی۔

حل : سمت = سمت (۱ + سمت) چونکہ سمت اور سمت مستقل اعداد ہیں
اس لیے عمل تفرق سے

$$\text{فر سمت} = \text{سمت} \cdot \frac{1}{2} (1 + \text{سمت}) \cdot \frac{1}{2} \text{ فر (1 + سمت)}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ سمت} (1 + \text{سمت}) \cdot \frac{1}{2} \text{ سمت}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر سمت}}{\text{سمت}} = \frac{\text{سمت}}{2(1 + \text{سمت})}$$

چونکہ ت کی پیمائش میں نصف فیصد کی خطا ہے اس لیے فرت = $\frac{ت}{۲۰۰}$

$$\frac{فرت}{سکت} = \frac{ت}{۲۰۰} \times \frac{ع}{(۱+ع)} = \frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)}$$

$$\therefore فرت = \frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)}$$

یعنی $\frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)}$ فی صد خطا واقع ہوگی۔

[واضح ہو کہ ع کی قیمت $\frac{۱}{۲۴۳}$ ہے اس لیے

$$یعنی \frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)} \times \frac{۱}{۲۴۳} = \frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)}$$

$$\frac{۱}{۲۴۳} \frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)} = \frac{ت}{۳۰۰(۱+ع)}$$

مثالیں

(۱) ۵ فٹ نصف قطر والے ایک گڑ کے قطر کی پیمائش میں ایک فی صد کی خطا اگر واقع ہوئی ہو تو بتاؤ حجم کی پیمائش میں فی الواقع کتنی فی صد خطا پیدا ہوتی ہے اور عمل تفرق سے اس کی تقریبی قیمت کیا ہوگی۔

$$[\text{جواب} \text{ مع } ح = ۳۶.۰۳ \text{ فی صد}]$$

$$[\text{اور فرح} = ۳ \text{ فی صد}]$$

(۲) ایک رقص والی گھڑیال دن بھر میں ۴ منٹ سست چلتی ہے۔ صبح چلنے کے لیے اس کے 'طول' کو کتنا فی صد چھوٹا کرنے کی ضرورت ہوگی؟

$$[\text{جواب} = ۰.۵۶ \text{ فی صد}]$$

(۳) تفاعل ف (لا) = لوک ۳ $\sqrt{\frac{۲+۱۱۳}{۱۱۲-۳}}$ میں اگر لا کی پیمائش میں ایک

تقلیل مقدار فرلا کا سہو واقع ہو تو بتاؤ ف (لا) کی قیمت میں کیا سہو واقع ہوگا۔

$$\frac{۱۳ \text{ فرلا}}{[جواب ف (لا) = ۳(۲+۱۳)(۷۲-۳)]}$$

$$(۴) ۱ = ۱ + ۱۱۲ + ۱۴ = ۸ \text{ ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{۱۱۲(۱+۱۱)}{۱۴+۱۱} = ۱۱۲$$

$$(۵) \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱} \text{ بتاؤ کہ } ۱۱۲ = \frac{۱}{۱۱} \text{ فرلا}$$

(۶) جمودی سلخ (Inertia bar) کے مردوی اہتراندل کے

وقت دوران کا ضابطہ

$$۲ = \pi \sqrt{\frac{۲ \text{ ج ل}}{\pi \text{ ج م}}}$$

جس میں ۲ = وقت دوران، ج = سلخ کے جمود کا معیار اثر تار کے محور کے گرد، ل = تار کا طول، ۱ = تار کے مادہ کی استواری کی شرح اور

م = تار کا نصف قطر

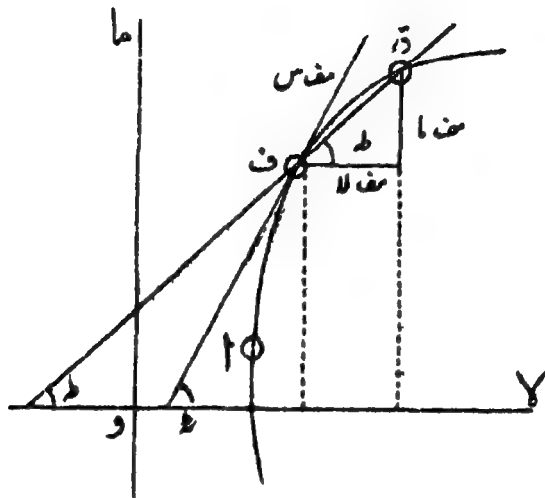
اگر پیمائش میں (۱) قطر کے ناپنے میں ایک فی صدی خطا ہو تو ثابت کرو کہ استواری کی محسوبہ قیمت میں ۴ فی صدی خطا پیدا ہوگی اور (۲) وقت دوران کی تعیین میں ایک فی صدی خطا ہو تو استواری کی محسوبہ قیمت میں ۲ فی صدی خطا پیدا ہوگی۔

۷۔ علی القوائم محدودوں میں قوس کے تفرقہ کی

تعیین۔ شکل ۳ میں قوس ۱ ف ق کا طول ایک معین نقطہ ۲ سے لے کر ف تک س ہے۔ اس کے اضافہ (= قوس ف ق) کو کمس سے تعبیر کرو۔ فرض کیا جاتا ہے کہ

$$۱ = \left(\frac{\text{وتر ف ق}}{\text{قوس ف ق}} \right)$$

[بالفاظ دیگر وترق اور اس کی متناظر قوس = مف س کے مابین
مف س سے بلند تر رتبہ کے صغاریہ کا تفاوت ہے۔]



شکل ۸۳

شکل سے ظاہر ہے کہ

وتر (ف ق) = (م ف لا) + (م ف ما)

اس مساوات کے یہ ہے جانب کے رکن کو (مف س) اسے ضرب و تقسیم کرو اور یہ ہے اور بائیں دونوں ارکان کو (مف لا) پر تقسیم کرو تو

$$\left(\frac{\text{مفاس}}{\text{مفلا}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\text{مفاس}}{\text{مفلا}}\right)^2 \left(\frac{\text{وتر ف ق}}{\text{مفاس}}\right)$$

اب اگر نقطہ ق نقطہ ف سے انتہائی قریب ہو جاتا ہے تو منف لاس۔ اور

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2$$

دونوں ارکان کو فرلائے سے ضرب دینے پر

(۱) فرما + فرلا = فرس

اس کے عین اوپر والی مساوات کا جذر المربع نکال کر اس کے دونوں ارکان کو
فرس سے ضرب دیجئے سے

$$\text{فرس} = \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فریلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۱) سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ

$$\text{فرس} = \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فریلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \dots \dots \dots (۳)$$

مساوات (۲) سے چونکہ $1 + \left(\frac{\text{فریلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 = \text{مس}^2 = \text{قط}^2$

لہذا فرس = قط^۲ فرلا (جذر المربع کی مثبت علامت منتخب کر کے)۔
پس باسانی ثابت ہو جاتا ہے کہ

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم}^2 \text{ اور } \frac{\text{فریلا}}{\text{فرس}} = \text{جب}^2 \dots \dots \dots (۴)$$

مثال - شکل ناقص ب^۲ لا^۲ + لا^۲ = لا^۲ ب^۲ کی قوس کا تفسرہ

دریافت کرو۔

حل: لا کی رقوم میں

$$\text{فرس} = \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فریلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

$$\text{عمل تفرق سے } \frac{\text{جربا}}{\text{فرلا}} = - \frac{\text{ب}^2}{\text{لا}^2}$$

$$\therefore \text{فرس} = \left\{ 1 + \frac{\text{ب}^2 \text{لا}^2}{\text{لا}^4} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

$$= \frac{\left\{ (لا^2 - لا^2) + (لا^2 - لا^2) + \text{ب}^2 \text{لا}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}}{\text{لا}^2 (لا^2 - لا^2)}$$

$$\text{اسی طرح لا کی رقوم میں فرس} = \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فریلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

$$\therefore \text{فرس} = \frac{\{ \text{ب}^2 (\text{ب}^2 - \text{ا}^2) + (\text{ا}^2 \text{ا}^2) \}^{\frac{1}{2}}}{\text{ب} (\text{ب}^2 - \text{ا}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

۷۔ قطبی محدوں میں فرس کے تفرقہ کی تعیین۔

چونکہ کسی بھی نقطہ کے کارٹیسی اور قطبی محدوں میں رابطہ

لا = سرجم طہ اور ما = سرجب طہ ہے

فرلا = جم طہ فرس - سرجب طہ فرطہ اور فرما = جب طہ فرس + سرجم طہ فرطہ
پس م کے کی مساوات (۱) میں عمل تعویض و تحویل و جذر المربع سے

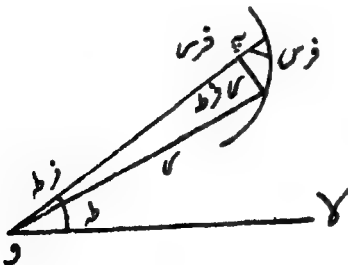
$$\text{فرس} = \sqrt{\text{فرس}^2 + \text{سر}^2 \text{فرطہ}^2}$$

$$= \left\{ \text{سر}^2 + \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرطہ}$$

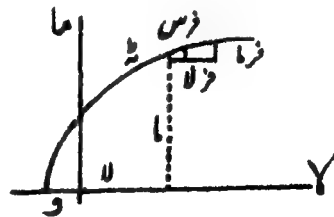
[نوٹ - مٹ اور مٹ کے ضابطوں کو یاد رکھنے کے لیے ذیل کی دیکھوں سے مدد لی جاسکتی ہے۔]

شکل (۱۲) میں فرس ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر ہے جس کے ضلع فرلا اور فرما ہیں اور فرما کے مقابل کا زاویہ ٹ ہے۔ اس میں فرس = { (فرلا)² + (فرما)² }^{\frac{1}{2}}

$$\text{اور جم ٹ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \text{ اور جب ٹ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$



شکل (ب)



شکل (۱۲)

شکل (ب) میں فرس ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر ہے جس کے ضلع فرس

۱ اور سر فرطہ ہیں -

اس میں فرس = { (سر فرطہ) + (فرس) }^۱
 فرس اور فرس کے درمیانی زاویہ کو پہ سے تعبیر کرنے سے

$$\text{مس پہ} = \text{سر فرطہ} = \frac{\text{سر}}{\text{فرس}} \text{ جبکہ سر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$$

مثال - خط تدویر { لا = لا (ط - جب ط) } کے لیے ط اور فرطہ کی رتوں میں
 قوس کا تفرقہ دریافت کرو۔

حل - عمل تفرق سے فرلا = لا (۱ - جم ط) فرطہ = فرطہ = جب ط فرطہ

پس فرس = لا (۱ - جم ط) فرطہ + لا جب ط فرطہ = لا (۱ - جم ط) فرطہ

لیکن (۱ - جم ط) = ۲ جب ط = ۲ پس فرس = ۲ جب ط = ۲ فرطہ

مثالیں

ذیل کے منحنیوں کے لیے لا اور فرلا کی رتوں میں فرس معلوم کرو:-

$$(۱) \text{ لا} = \text{لا} + \text{ب لا} + \text{ج} \quad [\text{جواب فرس} = (۱ + \text{ب لا} + \text{ب لا} + \text{ب لا} + \text{ب لا}) \text{ فرلا}]$$

$$(۲) \text{ ما} = \text{لوک قط لا} \quad [\text{جواب فرس} = \text{قط لا فرلا}]$$

ذیل کے منحنیوں کے لیے ما اور فرلا کی رتوں میں فرس کی تعیین کرو:-

$$(۳) \text{ ما} = ۲ \text{ لا} \quad [\text{جواب فرس} = \frac{(۲ \text{ لا} + ۲ \text{ لا})}{۲} \text{ فرلا}]$$

$$(۴) \text{ لا} = \text{ما} + \text{لا} \quad [\text{جواب فرس} = \frac{\text{ما} + \text{لا}}{۲} \text{ فرلا}]$$

منحنیاں ذیل کے لیے ط اور فرطہ کی رتوں میں فرس دریافت کرو:-

$$(۵) \text{ سر} = ۵ \text{ جم ط} - ۱۲ \text{ جب ط} \quad [\text{جواب فرس} = ۱۳ \text{ فرطہ}]$$

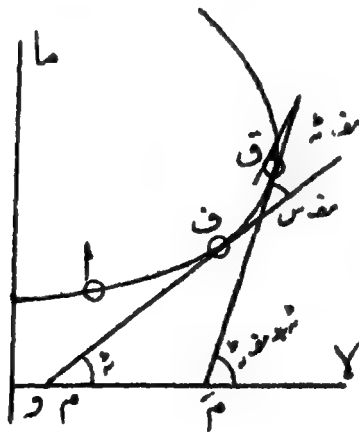
$$(۶) \text{ سر} = ۲ - ۳ \text{ جب ط} \quad [\text{جواب فرس} = (۱۲ - ۱۳) \text{ جب ط} \text{ فرطہ}]$$

نواں باب

انحناء نصف قطر انحناء اور دائرہ انحناء

۱۔ انحناء۔ جیسے باب میں ہم نے منحنی کے مڑنے کی سمت کا ذکر کیا ہے۔ کسی نقطہ کے پاس منحنی کی شکل اس کے مڑنے یا تبدیلی سمت کی شرح کے تابع ہوتی ہے۔ ریاضی کی اصطلاح میں منحنی کے کسی نقطہ پر کی شرح تبدیلی سمت کو اس نقطہ پر کا انحناء کہتے ہیں۔ ہم اس کو اسے تعبیر کریں گے اور یہاں اس کے لیے ایک جملہ حاصل کریں گے۔

شکل ۳۹ میں منحنی افق پر نقطہ ف کے قریب ق ایک دوسرا نقطہ



شکل ۳۹

اس منحنی کے خطِ مماس کا نقطہ تماس جب ف سے بدل کر ق ہوتا ہے
یعنی قوس ف ق (= منحنی) طے کرتا ہے تو خطِ مماس زاویہ ممف ٹ
میں گھوم جاتا ہے۔ یعنی ممف ٹ = خطِ مماس کے زاویہ میلان کی تبدیلی۔
پس ہم قوس ف ق کے اوسط انحناء کو ممف ٹ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ اور
اس لیے کسی نقطہ ف پر کا انحناء (ن) اس کے اوسط انحناء کی
انتہائی قیمت ہے جبکہ ف بالآخر ف کے انتہائی قریب
پہنچ جاتا ہے

$$\therefore \text{ن} = \text{نہا ممف ٹ} = \frac{\text{فرٹ}}{\text{فس}} = \text{منحنی کا نقطہ ف پر کا انحناء} \dots (۱)$$

پس انحناء سے مراد زاویہ میلان کی لمبایا قوس شرح تبدیلی ہے۔ چونکہ زاویہ ممف ٹ
نیم قطروں میں ناپا جاتا ہے اور قوس ممف س طول کی اکائیوں میں اس لیے
کسی نقطہ پر سے انحناء کی اکائی ایک نیم قطری فی اکائی طول ہے۔

۲۔ دائرہ کا انحناء۔

دائرہ کے کسی نقطہ پر بھی اس کا انحناء نصف قطر کا
متکافی ہے اور اس لیے تمام نقطوں پر اس کی ایک ہی قیمت
ہوتی ہے۔

مکمل سن سے واضح ہے کہ نقاط ف اور ق پر کے مماسی خطوں کا دوسرا
زاویہ ممف ٹ دائرہ کے مرکز م پر کے زاویہ ف م ق کے مساوی ہے جو نصف قطروں
م ف اور م ق کے مابین واقع ہے

$$\text{پس ممف ٹ} = \frac{\text{زاویہ ف م ق}}{\text{ممف س}} = \frac{\text{ممف ق}}{\text{ممف س}} = \frac{۱}{\text{س}}$$

(جس میں س = دائرہ کا نصف قطر) اس لیے کہ زاویہ ف م ق کی
نیم قطروں میں پیمائش ہوتی ہے۔

نہا مفٹ کے لیے ایک آسان جلد اس طرح حاصل ہو سکتا ہے:

$$\text{چونکہ مس ٹ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ اس لیے ٹ} = \text{مس}^2 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{اور } \frac{\frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}}{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{پس } \frac{\frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \frac{\frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \text{پس } \frac{\frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}$$

$$(1) \dots \dots \dots \frac{\text{ٹ}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \dots$$

نوٹ :- اگر دیے ہوئے جلد میں تفرق بلحاظ آسان تر ہو تو انحناء کو لا اور لا (یعنی لا کے بلحاظ ما پہلے اد دوسرے مشتق) کی رقموں میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ اسی صورت میں

$$(2) \dots \dots \dots \frac{\text{ٹ} - \text{لا}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{لا}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \dots$$

$$\text{اس لیے کہ ٹ} = \text{مس}^2 \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{اور } \frac{\frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}}{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} = \frac{\text{فرٹ}}{\text{فرلا}}$$

یہاں یہ بات بھی یاد رکھنے کے قابل ہے کہ مساوات (۱) سے کام نہیں لیا جاسکتا

جبکہ مآ نامتناہی ہوتا ہے یعنی جبکہ نقطہ ف پر کا خط ماس انحناء بی ہوتا ہے۔
 ایسی حالت میں مساوات (۲) میں $\text{لا} = 0$ اور $\text{ن} = -\text{لا}$ ۔
 ل کی جبری علامت کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مساوات (۱) میں نسب نما
 کی مثبت علامت منتخب کرنے سے ن اور مآ کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ پس
 ن کی علامت مثبت ہوتی ہے جبکہ منحنی اوپر کی جانب مقعر ہوتا ہے اور
 یہ علامت منفی ہوتی ہے جبکہ منحنی نیچے کی جانب مقعر ہوتا ہے۔

تقریبی مثال۔ خط تدویر $\{\text{لا} = 0\}$ (ط۔ جب ط) $\text{ما} = 0$ (ا۔ جم ط) کا

انحناء دریافت کرو۔

$$\text{حل: مآ} = \frac{\text{فرط}}{\text{لا}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ا۔ جم ط}}$$

$$\text{پس } 1 + (\text{ما})^2 = \frac{2}{1 - \text{جم ط}}$$

$$\text{اور مآ} = \frac{\text{فر} \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ا۔ جم ط}} \right)}{\text{فرط}} = \frac{1}{(1 - \text{جم ط})^2}$$

$$\therefore \text{ن} = -\frac{1}{(1 - \text{جم ط})^2} = -\frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{4} \text{ ط}$$

۳۔ انحناء کے لیے ضابطہ۔ قطبی محدودوں کی
 رقموں میں۔

ساتویں باب میں قطبی مساوات کے ضمن میں شکل ۲۳ بتایا گیا ہے کہ

$$\text{ط} = \text{ط} + \text{پہ}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} = 1 + \frac{\text{فرپہ}}{\text{فرط}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{مہذا یہ} = \text{سن}^2 \frac{\text{م}}{\text{م}} (\text{میں میں سر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}})$$

$$\text{اس لیے} \frac{(\text{سر}^2 - \text{سر}^2)}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$$

$$(۲) \dots \frac{\text{سر}^2 + ۲(\text{سر}^2 - \text{سر}^2)}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} \text{ کی نو سے}$$

لہذا سابقہ باب کی فصل () کی مساوات () سے

$$(۳) \dots \frac{1}{2} \{ \text{سر}^2 + (\text{سر}^2) \} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$$

مساوات (۲) اور مساوات (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{انحناء} \text{ ن} = \frac{\text{سر}^2 + ۲(\text{سر}^2 - \text{سر}^2)}{\frac{1}{2} \{ \text{سر}^2 + (\text{سر}^2) \}}$$

توضیحی مثال - مرمی (projectile) کی مساواتیں

لا = ر (جم) و ادما = ر (جب) و - ۱ ج و ہیں جن میں ر ابتدائی رفتار ہے 'ع اس ابتدائی رفتار کا افق کے ساتھ زاویہ میلان و وقت اور ج جاذبہ زمین ہے - اس کے بلند ترین نقطہ کے پاس منحنی کا انحناء دریافت کرد -

$$\text{حل:} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} = \text{ر جم} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{ر جب} - ج و$$

$$\text{ما کی قیمت اعظم ہوتی ہے جہاں پر کہ} \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = 0 \text{ یعنی جبکہ} \text{و} = \frac{\text{ر جب}}{\text{ج}}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ر جب} - ج و}{\text{ر جم}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

زنجیرہ کے سب سے نیچے کے نقطہ پر ماکہ قیمت اقل ہے اور اس لیے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ یعنی } مآ = \text{صفر}$$

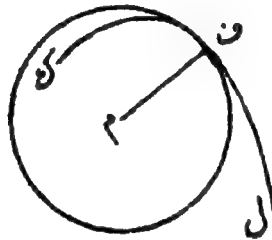
اس کے لیے $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$: اس صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ لا = صفر

$$\text{اس نقطہ پر ماکہ قیمت} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{پس یہاں } ص = \frac{1}{2} = 1$$

۷۔ دائرہ اسنخا۔ شکل ۱۱ میں منحنی ک ف ل

کے کسی نقطہ ف پر غور کرو۔ ف پر منحنی کے مماسی خط کا ڈھلان وہی ہے جو اس نقطہ پر خود منحنی کا ڈھلان ہے۔



شکل ۱۱

(۱۔ چٹنا باب)۔ اسی طرح ہم منحنی کے ہر نقطہ کے لیے ایک مماسی دائرہ تیار کر سکتے ہیں جس کا اسنخا وہی ہے جو اس نقطہ پر منحنی کا اسنخا ہے۔ اس مقصد کے لیے حسب ذیل عمل کیا جائے: نقطہ ف پر منحنی کا ایک عماد منحنی کے مقعر جانب کھینچو۔ اور اس عماد پر فاصلہ ف م نقطہ ف پر سے نصف قطر اسنخا (= ص) کے مساوی ناپو۔ م کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو نقطہ ف میں سے گزرے۔ اس دائرہ کا اسنخا $ن = \frac{1}{ص}$

جو خود منحنی کے خود نقطہ ف پر کے اخذاء کے مساوی ہے۔ اس طرح جو دائرہ تیار کیا جاتا ہے منحنی کے نقطہ ف پر کا دائرہ اخذاء کہلاتا ہے۔ علی العسوم منحنی کے کسی نقطہ پر کا دائرہ اخذاء اس نقطہ پر منحنی کو عبور کر چکا۔ چنانچہ شکل ۱۱۱ میں اس کی توضیح کی گئی ہے۔ جسٹے باب میں نقطہ عطف پر کے مماسی خط کا جو ذکر آیا ہے اس سے مقابلہ کیا جائے۔ جیسے کہ نقطہ ف پر کا مماسی خط منحنی کے اس نقطہ پر کی سمت کو ظاہر کرتا ہے اسی طرح ف پر کا دائرہ اخذاء منحنی کے اس نقطہ پر کے اخذاء کا ہندسی تختیل قائم کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے۔ اس لیے کہ منحنی اور دائرہ کے سمت کی تبدیلی کی شرح دونوں ف پر ایک ہی ہیں۔ آگے چل کر ہم دائرہ اخذاء کی اس طرح تعریف کریں گے کہ وہ ایک قاطع دائرہ کی انتہائی وضع ہے۔ یہ تعریف خط مماس کی تعریف کے مشابہ ہے جو متذکرہ بالا باب میں کی گئی ہے۔

توضیحی مثال - منحنی $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ کے نقطہ (۰، ب)

پر کا نصف قطر اخذاء دریافت کرو۔ منحنی کو مرتسم کرو اور نقطہ مذکور پر کا دائرہ اخذاء کھینچو۔

$$\text{حل: } \frac{فری}{فری} = - \frac{۳(\frac{ب}{۲})}{\frac{۱}{۲} فری}$$

$$\frac{فری}{فری} = - \frac{۳(\frac{ب}{۲})}{\frac{۱}{۲} فری} \left\{ \frac{۱}{فری} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} \right\}$$

$$= - \frac{۳(\frac{ب}{۲})}{\frac{۱}{۲} فری} \left(\frac{۲}{فری} - \frac{۱}{۲} \right)$$

$$\text{نقطہ (۰، ب) پر } \frac{فری}{فری} = - \frac{فری}{فری} \text{ اور } \frac{فری}{فری} = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{پس } ص = \frac{۱}{فری} \left\{ ۱ + \left(\frac{فری}{۲} \right)^2 \right\} = \frac{۱}{فری} = \frac{۱}{۳} = - \frac{۱}{۳}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل مغنیوں کے مصرعہ نقطوں پر کے نصف قطر اخنسا اور یافت کرو۔ اور ان مغنیوں کو مرتسم کر کے ان کے متناظر دائرہ اخنسا تیار کرو :-

(۱) قطع ناقص $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{با^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ (۱، ۰) پر
جواب م = $\frac{۲}{۳}$

(۲) قطع زائد $\frac{لا^2}{ب^2} - \frac{با^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ (۱، ۰) پر
جواب م = $\frac{۲}{۳}$

(۳) متساوی الاضلاع (equilateral) خط زائد لا = ۱۲ کے نقطہ (۳، ۳) پر
جواب م = $\frac{۲}{۳}$

ذیل کے مغنیوں کے کسی بھی نقطہ (۱، ۱) پر کا نصف قطر اخنسا محسوس کرو :-
(۴) $\frac{لا^2}{ب^2} + \frac{با^2}{ب^2} = ۱$
جواب م = $\frac{۲}{۳}$

(۵) $۱ = ۱$ کوک قط لا
ثابت کرو کہ :-
جواب م = $\frac{۲}{۳}$

(۶) خط منوبری م = ۱ (۱ - جم ط) کے کسی بھی نقطہ (م، ط) پر کا

نصف قطر اخنسا = $\frac{۲}{۳}$

(۷) ایسرن یا چشمہ منحنی م = ۱ جم ط کے نقطہ (م، ط) پر کا

نصف قطر اخنسا = $\frac{لا^2}{۳م}$

(۸) منحنی م = ۱ جب ط کے نقطہ (م، ط) کے لیے م کی

قیمت $\frac{۳}{۲}$ جب ط = ۱ ہے۔

۱۔ مرکز انحناء۔ منحنی کے کسی نقطہ پر کے مماسی خط کے

محدد لا، ما اور پہلے مشتق ما کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو منحنی کے لیے ہوتی ہیں۔ اسی منحنی کے نقطہ ف پر کے دائرہ انحناء کے محدّد لا، ما اور پہلے اور دوسرے مشتق ما اور ما کی قیمتیں بھی وہی ہوتی ہیں جو منحنی کے لیے ہیں۔ پس ہم کسی منحنی پر کے نقطہ ف (محدد لا، ما) کے متعلقہ مرکز انحناء (محدد عہ، بہ) کی اس طرح تعریف کر سکتے ہیں کہ وہ منحنی کے اس نقطہ پر کے دائرہ انحناء کا مرکز ہے۔

منحنی کے کسی نقطہ ف (محدد لا، ما) کے متعلقہ مرکز انحناء کے محدّدوں (عہ، بہ) کی تعیین۔

چونکہ دائرہ انحناء کی مساوات (لا - عہ) + (ما - بہ) = ص^۲ (۱) ہے

$$\text{پس اس مساوات کے پہلے تفرق سے } \begin{cases} \frac{فر\ لا}{فر\ ما} = \frac{لا - عہ}{ما - بہ} \\ \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = - \frac{فر\ ما}{(ما - بہ)^۲} \end{cases} \dots (۲)$$

ص کی قیمت یعنی $\frac{\{۱ + (ما)^۲\}}{۱}$ تعویض کرنے سے مساوات (ما - بہ) = $\frac{\{۱ + (ما)^۲\}}{(ما)^۲}$ حاصل ہوتی ہے۔

$$\therefore ما - بہ = \frac{۱ + (ما)^۲}{(ما)^۲} \dots \dots \dots (۳)$$

پس (۲) کی پہلی مساوات اور مساوات (۳) کی مدد سے

$$لا - عہ = ما - (ما - بہ) = \frac{\{۱ + (ما)^۲\}}{۱}$$

$$\therefore عہ = لا - \frac{\{۱ + (ما)^۲\}}{۱} \text{ اور } بہ = ما + \frac{۱ + (ما)^۲}{۱} \dots (۴)$$

نوٹ (۱)۔ یہی نتائج ہم شکل ۳۲ کی مدد سے بھی آسانی حاصل کر سکتے ہیں۔ اس لیے کہ

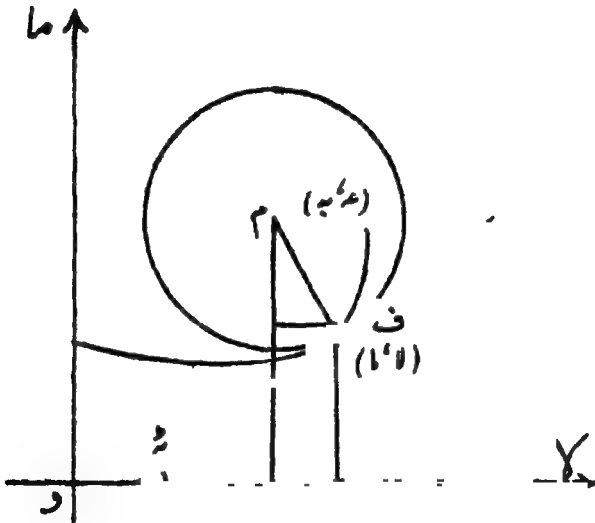
ع = لا - ص جب ٹ { جن میں ٹ = زاویہ جو ف پر کا ماسی خط محور لا اور یہ = ما + ص جم ٹ کے ساتھ بناتا ہے۔ اور ص نصف قطر انحناء ہے

$$\text{جب ٹ} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\{(\text{ما}')^2 + 1\}}} \text{ اور جم ٹ} = \frac{1}{\sqrt{\{(\text{ما}')^2 + 1\}}}$$

[ملاحظہ ہو سابقہ باب کا آخری حصہ قط ٹ = ۱ + مس ٹ اور

قم ٹ = ۱ + مم ٹ کی مدد سے بھی یہ ضابطے فوراً حاصل کر لیے جاسکتے ہیں۔]

$$\text{لہذا ع} = \text{لا} - \frac{\frac{\text{لا}}{\sqrt{\{(\text{ما}')^2 + 1\}}} \times \frac{\sqrt{\{(\text{ما}')^2 + 1\}}}{\text{ما}'}{\frac{\{(\text{ما}')^2 + 1\} \text{لا}}{\text{ما}'}} = \text{لا} - \frac{\text{لا}}{\text{ما}'}$$



شکل ۳۲

اسی طرح $\frac{\{^2(\bar{a})+1\}}{\bar{a}} + 1 = \bar{b}$
 نوٹ (۲)۔ اگر \bar{a} اور \bar{b} علی الترتیب \bar{a} کے بلحاظ \bar{a} پہلے اور دوسرے
 مشتق ہوں تو

$$(5) \dots\dots\dots \begin{cases} \frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}} + \bar{a} = \bar{c} \\ \bar{a} - \frac{\{^2(\bar{a})+1\}}{\bar{a}} = \bar{b} \end{cases}$$

چونکہ $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ جب $\bar{b} = \bar{a} + \bar{c}$ جس جم \bar{b}

اور جب $\bar{b} = \frac{1}{\frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}} + 1}$ اور جم $\bar{b} = \frac{\bar{a}}{\frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}} + 1}$

معینا جیسا کہ قبل ازیں ثابت کیا جا چکا ہے (ملاحظہ ہو مساوات ۲ صفحہ ۱۵)
 $\bar{c} = \bar{a} - \frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}}$

اس لیے $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ جس جم $\bar{b} = \bar{a} + \bar{c}$ جس جم $\bar{b} = \frac{1}{\frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}} + 1} \times \frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}}$

$$\frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}} + \bar{a} =$$

اسی طرح $\bar{b} = \bar{a} + \bar{c}$ جس جم $\bar{b} = \bar{a} - \frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}}$

$$\bar{a} - \frac{\{^2(\bar{b})+1\}}{\bar{b}} =$$

واضح ہو کہ مساواتیں (۵) اُس صورت میں کارآمد ہوتی ہیں جبکہ \bar{a} کی قیمت

نامتناہی ہر جاتی ہے یا کہ تفرق بجا ما آسان تر ہوتا ہے۔

توضیحی مثال - خط زائد $\frac{لا}{۱} - \frac{ما}{۲} = ۱$ کے کسی بھی نقطہ (لا، ما)

کے متعلقہ مرکز انما کے متحد (عہ، ب) دریافت کرو۔

$$\text{حل: عہ} = لا - \frac{ما}{۲} \{ (ما) + ۱ \} = \frac{لا - ما - ۱}{۲}$$

$$\text{عمل تفرق سے } ما = \frac{ب - لا}{۲} \text{ اور } ما = - \frac{ب - لا}{۲}$$

$$\frac{\frac{ب - لا}{۲}}{\frac{لا - ما - ۱}{۲}} = \frac{\frac{ب - لا}{۲}}{\frac{لا - ما - ۱}{۲}} = \frac{ب - لا}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱} = \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱} = \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱} = \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱} = \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

$$= \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱} = \frac{لا (لا - ما - ۱) + (ب - لا) (لا - ما - ۱)}{لا - ما - ۱}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل منحنیوں کے معرہ نقطوں سے متعلق مرکز انحناء کے محدد معلوم کرو:

(۱) $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ لا نقطہ (۳، ۳) پر جواب $۳ - ۳ - ۳ - ۳$

(۲) $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ جب لا نقطہ (۳، ۳) پر جواب $۳ - ۳ - ۳ - ۳$

(۳) $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ لا نقطہ (۳، ۳) پر جواب $۳ - ۳ - ۳ - ۳$

(۴) خطِ مماسی $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ لا کے کسی نقطہ سے متعلق مرکز انحناء دریافت کرو اور بتاؤ کہ اس کے راس پر انحناء اعظم ہے۔ جواب $۳ - ۳ - ۳ - ۳$ ثابت کرو کہ

(۵) منحنی $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ لا کے کسی نقطہ کے مرکز انحناء کے لیے $۳ - ۳ - ۳ - ۳$

$۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ ہے۔

(۶) $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ لا کے کسی نقطہ کے مرکز انحناء کے محدد $۳ - ۳ - ۳ - ۳$ اور $۳ - ۳ - ۳ - ۳$ ہیں۔

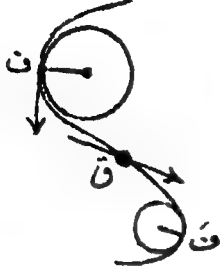
نوٹ - چھٹے باب کے حصہ (الف) میں بتایا گیا ہے کہ نقطہ عطف مثلاً شکل ۳ کے نقطہ قی پر $۳ - ۳ - ۳ - ۳$ اور چونکہ

انحناء $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ اور نصف قطر انحناء $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$

اور مرکز انحناء کے محدد $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ $۳ = ۳ - ۳ - ۳ - ۳$ ہیں

پس واضح ہے کہ عام طور پر ۳ اور ۳ بغیر انتہا کے بڑھتے جاتے ہیں

جیسے جیسے مخنی کی مسادات میں متفاعل ما کا دوسرا مشتق بلحاظ لا صفر کے قریب ہوتا جاتا ہے، الا اس صورت کے



کہ ماسی خط انتصابی ہو۔ یعنی اگر ہم فرض کریں کہ شکل ۳۳ میں نقطہ ن مع اس کے ماسی خط کے مخنی پر سے گزرتا ہوا نقطہ ن کو جاتا ہے تو نقطہ عطف ق پر مخنی کا اسخناؤ صفر ہوتا ہے، ماسی خط کا گھاؤ

شکل ۳۳

موقتاً رک جاتا ہے اور پھر جیسے ہی گھاؤ کی سمت بدلتی ہے، مرکز اسخناؤ بغیر انتہا دور ہٹ جاتا ہے اور نصف قطر اسخناؤ نامتناہی ہو جاتا ہے۔

دسوال باب

اوسط قیمت کا مسئلہ اور اس کے اطلاق

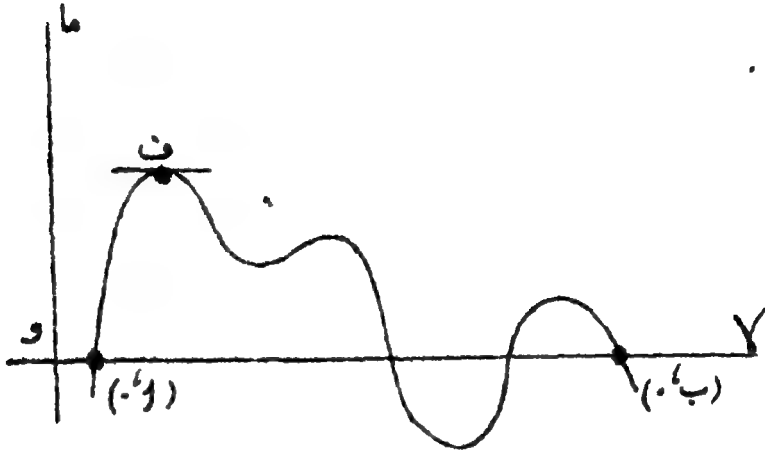
۱۔ احصاء کے اساسی مسائل میں سے ایک مسئلہ رول (Rolle) کے نام سے منسوب ہے۔ ہم اس کو یہاں مختصراً بیان کیے دیتے ہیں تاکہ اس کی دو سے چند مفید نتائج اخذ کیے جاسکیں۔

فمن کروا = ف (لا) ایک مسلسل و حید قیمت تفاعل لا ہے جو لا = ل اور لا = ب پر منحصر ہوتا ہے۔ نیز یہ بھی فرض کرو کہ ما کا مشتق ف (لا) مسلسل ہے۔ ایسی صورت میں یہ تفاعل ترسیماً شکل ۲ کی طرح ایک مسلسل منحنی کے ذریعہ تعبیر کیا جاسکیگا۔ اس کے ملاحظہ سے واضح ہوگا کہ ل اور ب کے مابین لا کی کم از کم ایک قیمت پر منحنی کا جہاں کسی خط محور لا کے متوازی ہے۔ یعنی منحنی کا ڈھلان صفر ہے جیسا کہ نقطہ ف پر کے ماسی خط سے عیاں ہے۔

رول کا مسئلہ۔ اگر ف (لا) منعدم ہوتا ہے

جبکہ لا = ل اور لا = ب اور ف (لا) اور ف (لا) لا = ل سے لے کر لا = ب تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہیں، تو ف (لا) لا کی ل اور ب کے مابین کم از کم

ایک قیمت پر صفر ہوگا۔



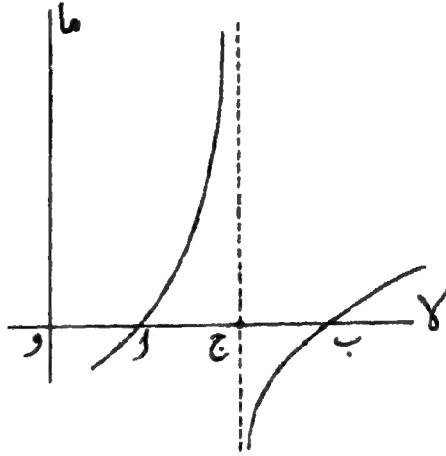
شکل ۳۳

اس مسئلہ کی تصدیق کے لیے کسی قسم کے ثبوت کی ضرورت نہیں، اس لیے کہ لا جیسے جیسے x بڑھتا ہے $f(x)$ نہ تو ہمیشہ بڑھ سکتا ہے اور نہ ہمیشہ گھٹ سکتا ہے کیونکہ $f(0) = 0$ اور $f(ب) = 0$ پس لا کی 0 اور $ب$ کے درمیان کم از کم ایک قیمت کے لیے $f(لا)$ کا بڑھنا موقوف ہو کر گھٹنا شروع ہو جانا چاہیے، یا نہیں تو گھٹنا موقوف ہو کر بڑھنا شروع ہو جانا چاہیے۔ اور لا کی اس مخصوص قیمت کے لیے $f(لا)$ کا پہلا مشتق $f'(لا)$ صفر ہو جانا چاہیے۔

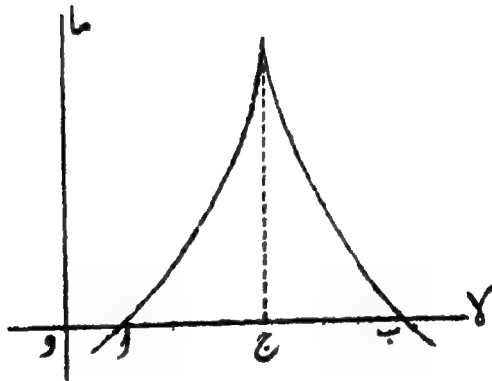
جیسا کہ اشکال (۳۵) اور (۳۶) سے ظاہر ہے جہاں $لا = 0$ اور $لا = ب$ کے درمیان $f(لا)$ یا $f(ب)$ غیر مسلسل ہوں وہاں ردول کے مسئلہ کا اطلاق نہیں ہو سکتا۔

شکل ۳۴ ایک ایسے تفاعل کی ترسیم ہے جو $لا$ اور $ب$ کے مابین $لا = ج$ کے لیے غیر مسلسل ہے یعنی $f(ج) = \infty$

اور شکل ۲۵۔ ایسے مسلسل تفاعل کی ترسیم ہے جس کا پہلا مشتق لا کی



شکل ۲۵



شکل ۲۶

ان ہی قیمتوں کے مابین $لا = ج$ کے لیے غیر مسلسل ہے یعنی $ف(لا) = -\infty$ ۔
 ان شکلوں کے مطالعہ سے واضح ہو گا کہ ہر دو صورتوں میں ترسیم کے کسی
 نقطہ پر $لا = ۱$ اور $لا = ب$ کے درمیان خطِ ماس (بالفاظ دیگر منحنی)

محور ولا کے متوازی ہوتا ہے۔

۲۔ اوسط قیمت کا مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور

فہ (لا) اور ان کے پہلے مشتق وقفہ (ا' ب) کے درمیان
ہر جگہ مسلسل ہوں اور معہذا اس وقفہ کے اندر فہ (لا)
منعدم نہیں ہوتا ہے، تو لا کی کسی قیمت لا = لا کے لیے جو ا
اور ب کے درمیان ہے۔

$$(۱) \quad \frac{ف(ب) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} = \frac{ف(لا)}{ف(لا)} \dots\dots (ا' > لا > ب)$$

اس کے ثابت کرنے کے لیے تفاعل

$$فہ(لا) \equiv \frac{ف(ب) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} [ف(لا) - ف(ا)] - [ف(لا) - ف(ا)] (۱)$$

تیار کرو۔ واضح ہے کہ فہ(لا) = فہ(ب) = ۰ اور اس لیے اس پر رول کے مسئلہ کا اطلاق ہو سکتا ہے۔

$$(۲) \quad \frac{ف(ب) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} = \frac{ف(لا) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} \dots\dots (۲)$$

اور ب کے مابین لا کی کسی قیمت لا = لا کے لیے فہ(لا) کو منعدم ہو جانا چاہیے۔

$$(۳) \quad \frac{ف(ب) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} = \frac{ف(لا) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} \dots\dots (۳)$$

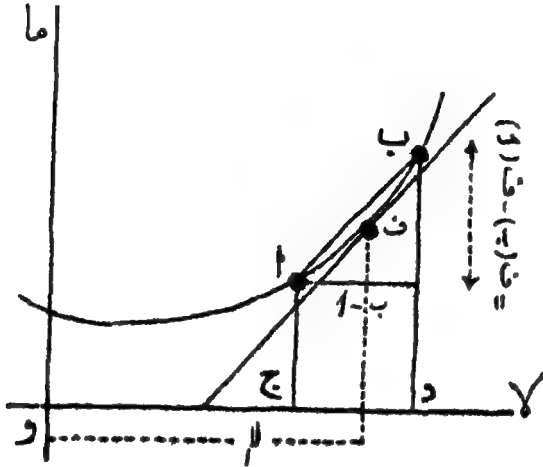
یہ یاد رکھ کر فہ(لا) منعدم نہیں ہوتا ہے سارے جگہ کو فہ(لا) پر تقسیم
کر کے ترتیب دینے سے نتیجہ (۲) مندرجہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر (۱) میں ف(لا) = لا تو

$$(ب) \dots \frac{ف(ب) - ف(ا)}{ف(ب) - ف(ا)} = ف(لا) (لا > ب)$$

اس صورت میں مسئلہ معرکہ بالا کی آسان ہندسی تعبیر ہوتی ہے۔ ملاحظہ ہو
شکل ۳۔ جو ف(لا) کی ترسیم ہے۔

$$\begin{aligned} \text{وج} &= \text{ا} \quad \text{ج} = \text{ا} = \text{ف} (1) \\ \text{ود} &= \text{ب} \quad \text{د} = \text{ب} = \text{ف} (2) \\ \text{پس} \quad \text{ف} (2) - \text{ف} (1) &= \text{وتر ا ب کا ڈھلان} \\ &= \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{د} - \text{ج}} \end{aligned}$$



شکل ۳۳

واضح ہو کہ مساوات (ب) میں ف (لا) منحنی کی قوس ا ب کے ایک نقطہ پر کا ڈھلان ہے اور مساوات (ب) اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ اس نقطہ پر کا ڈھلان وتر ا ب کے ڈھلان کے مساوی ہے۔ پس قوس ا ب پر کم از کم ایک ایسا نقطہ ف ہے جس کا مماسی خط وتر ا ب کے متوازی ہے۔

شکل ۳۳ کے ملاحظہ سے معلوم ہوگا کہ لا = ا اور لا = ب کے درمیانی وقفہ میں منحنی پر ف کے مماثل اور بھی نقطے ہو سکتے ہیں۔ مساوات (ب) کو کسروں سے پاک کرنے سے مسئلہ حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے :

$$(ج) \dots \text{ف} (ب) = \text{ف} (ا) + (\text{ب} - \text{ا}) \text{ف} (لا)$$

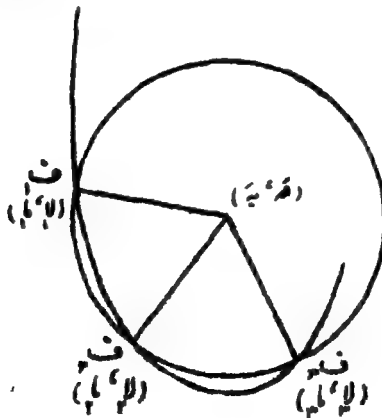
بجائے ب کے $ل +$ مف $ل$ لکھو تب ب - $ل =$ مف $ل$ اور چونکہ $ل$ اور ب کے مابین ایک حد ہے اس لیے ہم $ل$ کو $ل + ط$ مف $ل$ کے مساوی لکھ سکتے ہیں جس میں ط ایک مثبت واجب کسر ہے۔ اس طرح مساوات (ج) میں عمل توفیق سے اوسط قیمت کے مسئلہ کی ایک دوسری شکل حاصل ہوتی ہے۔

$$(د) \dots ف (ل + مف ل) - ف (ل) = مف (ل) ف (ل + ط مف ل) \dots$$

$$(ل > ط > ب)$$

۳۔ ہم اب رول کے مسئلہ کی مدد سے لٹمی دائرہ (Osculating Circle) کی ایک ہندسی مثال حل کر کے بتائیگی۔

تعریف۔ اگر کسی منحنی پر کے تین پٹروس کے نقطوں $ف$ ، $ف$ ، $ف$ ہم میں سے ایک دائرہ کھینچا جائے (ملاحظہ ہو شکل مشتمل)۔ اور نقاط $ف$ ، $ف$ ، $ف$ منحنی پر بیٹھے ہوئے نقطہ $ف$ کے بالآخر انتہائی وضع میں بالکل متصل ہو جائیں تب یہ دائرہ عموماً مقدار اور وضع میں ایک انتہائی دائرہ کو پہنچ جائیگا جو منحنی کا



شکل ۳

نقطہ $ف$ پر لٹمی دائرہ کہلاتا ہے۔

یہ لقمی دائرہ، دائرہ الخناء کا بعینہ، مماثل ہے۔

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات $ما = ف (لا)$ ہے۔ (۱)
اور لا، لام علی الترتیب نقاط ف، ف، ف کے فضلیہ یا مقطوعے ہیں
(عہ، عہ) محمولہ باللاتین نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کے متحدہ
ہیں اور ص اس کا نصف قطر ہے۔ تب اس دائرہ کی مساوات

$$(لا - عہ) + (ما - بے) = ص$$

اور چونکہ ف، ف، ف اور ف نقطوں کے متحدوں کو چاہیے کہ یہ مساوات
ان پر صادق آئے، لہذا

$$(۲) \dots\dots\dots \begin{cases} (لا - عہ) + (ما - بے) = ص \\ (لا - عہ) + (ما - بے) = ص \\ (لا - عہ) + (ما - بے) = ص \end{cases}$$

اب لا کے تفاعل پر غور کرو جس کی تعریف بذریعہ

ف (لا) = (لا - عہ) + (ما - بے) - ص کی جاتی ہے جس میں ما کی
تعریف بذریعہ مساوات (۱) کی گئی ہے۔
پس مساواتوں (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ف (لا) = ۰، ف (لام) = ۰ اور ف (لام) = ۰$$

اس لیے سوال کے مسئلہ سے ف (لا) لا کی کم از کم دو قیمتوں پر
منعدم ہو جانا چاہیے جن میں سے ایک قیمت لا اور لا کے درمیان
مثلاً لا ہے اور دوسری لا اور لا کے درمیان مثلاً لا ہے
یعنی ف (لا) = ۰ اور ف (لا) = ۰

اسی وجہ سے لاکھوں کی قیمت پر مابین لا اور لا کے مثلاً لام پر ف (لا) مقدم ہو جانا چاہیے۔ پس

فَ (لِلهِ) = .

اس لیے نقاط ف، فپ اور فپ میں سے گزرنے والے دائرہ کے
 خاصہ، مہ، بہ اور ص کے لیے ضروری ہے کہ وہ مندرجہ ذیل تین مساواتوں
 کی تصدیق کریں :

ف (لا) = ف (لَا) = ف (لِ) = ف (لِمْ) =

اب ف اور ف بالآخر نقطہ ف کے انتہائی قریب پہنچ جانے دو۔ تب لا، لا، لا، لا، لا نقطہ لا کو بطور انتہا پہنچ جائیگے اور اس لیے لغٹی دائرہ کے عناصر ع، ہ، ص کی تعین ذیل کی تین مساواتوں سے ہو جائیگی :

ف (ل) = ف' (ل) = ف (ل) = ف (ل)

حروف کے ذیلی نشاؤں کو ترک کرنے سے یہ مساواتیں حسبِ ذیل ہو جاتی ہیں:

(۳) $\mu = (\beta - 1) + (\alpha - 1)$

(۳) کو تفریق کر کے $(۱-۱) + (۱-۱) = ۰$ (۴)

(۴) کو تفریق کر کے $1 + (a_1)' + (a_2 - a_1)' + \dots = a_1'$ (۵)

مساواتوں (۴) اور (۵) کو (لا - ص) اور (ما - بی) کے لیے حل کرنے سے (چونکہ $\lambda \neq 0$) مساوات (۶) حاصل ہوتی ہے:

$$(4) \dots \frac{f(i) + 1}{1} = 1 \quad \frac{\{f(i) + 1\}i}{1} = 1$$

اس طرح $ع$ اور $ب$ کے لیے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں باب (۹) میں دائرہ انحناء کے محدودوں کے لیے حاصل شدہ مساواتوں کے عین مائل ہیں۔ ایسا ہی نصف قطر انحناء $ص$ کے لیے جو جملہ اخذ کیا جاتا ہے وہ بھی نصف قطر انحناء کے جملہ کے مائل ہے۔ پس لٹھی دائرہ انحناء کے متماثل ہے۔

مثال (۱) اگر $ف (لا) = لا^۳ - لا^۲$ تو $لا$ کی ان قیمتوں کو دریافت کر کے جن کے لیے $ف (لا)$ اور $ف (لا)$ منعدم ہوتے ہیں رول کے سلسلہ کی تصدیق کرو۔

حل $ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ = لا (لا^۲ - لا)$ منعدم ہوتا ہے

جبکہ $لا = ۰$ یا $لا = لا^۲$ کو $لا$ کی کم از کم ایک قیمت کے لیے $ف (لا)$ یعنی $لا^۳ - لا^۲ = ۰$ اور $لا = ۰$ اور $لا = لا^۲$ (صفر پر چلنا چاہیے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جبکہ $لا^۲ - لا = ۰$ یعنی $لا = ۱$ یا $لا = ۰$) کی ترسیم کھینچنے سے ان امور کی بہتر توضیح ہو سکتی ہے۔

مثال (۲) دریافت کرو جس کے لیے

$ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) ف (لا)$
در انحالیکہ $ف (لا) = لا^۲$ اور $ا = ۱$ اور $ب = ۲$

حل $ف (ب) = ب^۲ = ۴$ ، $ف (ا) = ا^۲ = ۱$

پس $۴ = ۱ + ا ف (لا)$

$ف (لا) = \frac{ف (ب) - ف (ا)}{ب - ا} = \frac{۴ - ۱}{۲ - ۱} = ۳$

۳ = $۴ = ۱ + ۲ لا^۲$ اور $لا^۲ = ۳$

$$\therefore \text{لا} = ۱۵$$

مثالیں

ذیل کی صورتوں میں لا کی قیمتیں معلوم کر کے جن کے لیے ف (لا) اور ف (لا) متعین ہو جاتے ہیں، دول کے مسئلہ کی تصدیق کرو:۔

$$(۱) \text{ ف (لا) = لا}^۲ - \text{لا}^۳ \quad (۲) \text{ ف (لا) = جب لا}$$

$$(۳) \text{ ف (لا) = جب لا} - \text{جم لا} \quad (۴) \text{ ف (لا) = مس لا} - \text{لا}$$

$$(۵) \text{ ف (لا) = لا}^۴ \quad (۶) \text{ ف (لا) = لا لوک لا}$$

$$(۷) \text{ لا دریافت کرو جس کے لیے}$$

$$\text{ف (ب) = ف (۱) + (ب - ۱) ف (لا) جبکہ}$$

$$\text{ف (لا) = لا}^۴ = ۱ = \text{ب} = ۱ \quad [\text{جواب لا = نو} - ۱ = ۱۰ = ۱۰۰]$$

۲۔ غیر معین صورتیں - جب متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت

کے لیے کوئی تفاعل مندرجہ ذیل صورتوں میں سے کوئی صورت اختیار کرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ غیر معین ہے:

$$\div \frac{\infty}{\infty} \cdot \infty \times \infty - \infty \cdot \infty \quad (۱) \quad (۲) \quad (۳)$$

اور دیے ہوئے جملہ سے متبوع متغیر کی اُس خاص قیمت کے لیے تفاعل مذکور غیر معترف ہوتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ

$$\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = ۱$$

جس میں متغیر کی کسی قیمت مثلاً لا = ۱ کے لیے

$$\text{ف (۱) = ۰ اور ف (۱) = ۰}$$

لا کی اس قیمت کے لیے متذکرہ بالا تفاعل غیر معترف ہوتا ہے اور اس لیے ہم اس کے لیے جو قیمت چاہیں مقرر کر سکتے ہیں۔ ہمارا مقصد ہے کہ جہاں کہیں ممکن ہو اس تفاعل کی ایسی قیمت مقرر کی جائے جو اس کو مسلسل بنائے جبکہ لا = ۱
اگر تفاعل ف (لا) ایک غیر معین صورت اختیار کرتا ہے جبکہ لا = ۱ تو تب اگر

نہا ن (لا)

موجود اور محدد ہے تو ہم لا = ۱ کے لیے یہ قیمت مقرر کرتے ہیں اور وہ اب لا = ۱ کے لیے مسلسل بن جاتا ہے۔
جیسا کہ ایک سابقہ باب (باب دوم) میں بتایا گیا بعض اوقات ایسے تفاعلوں کی انتہائی قیمت سادہ استخوانوں کے ذریعہ معلوم کر لی جاسکتی ہے۔ لیکن مصرعہ بالا غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے عام طریقے احصاء ہی پر منحصر ہیں

۵۔ غیر معین صورت نہ کی قیمت کی دریافت۔

اگر تفاعل ف (لا) کی صورت کا ہر ایسا کہ ف (۱) = ۱۰ اور ف (۱) = ۰۔
تو یہ تفاعل غیر معین ہے جبکہ لا = ۱۔ ہم ثابت کر چکے کہ

$$(۵) \dots \dots \dots \frac{\text{نہا ف (لا)}}{\text{لا}} = \frac{\text{نہا ف (لا)}}{\text{لا}} = \frac{\text{نہا ف (لا)}}{\text{لا}}$$

مسادات (۲) میں ب = لا لکھو چو کہ ف (۱) = ف (۱) = ۰۔

$$\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} \quad [\text{لا} > \text{لا}] \dots (۱)$$

اگر لا = ۱ تو نیز لا = ۱۔ پس اگر مساوات (۱) کا سیدھے جانب کارکن ایک انتہا کو پہنچتا ہے جبکہ لا = ۱ تو بائیں جانب کارکن بھی

اسی انتہا کو پہنچتا ہے اور اس طرح رابطہ (ھ) ثابت ہو جاتا ہے۔
رابطہ (ھ) ہے اگر ف (۱) اور ف (۱) دونوں صفر نہیں ہیں تو

$$\frac{ف (۱)}{ف (۱)} = \frac{ف (۱)}{ف (۱)} \dots \dots \dots (۲)$$

پس غیر معین صورت میں کی قیمت دریافت کرنے کا
قاعدہ یہ ہے کہ شمار کنندہ کو تفریق کر کے ایک نیا
شمار کنندہ قرار دیا جائے اور نسب نما کو تفریق کر کے
ایک نیا نسب نما قرار دیا جائے۔ اس نئی کسر کی قیمت
متغیر کی مقررہ قیمت کے لیے ابتدائی کسر کی انتہائی
قیمت ہوگی۔

اگر ایسی صورت پیش آئے کہ متغیر کی مقررہ قیمت کے لیے شمار کنندہ
اور نسب نما دونوں کے پہلے شق بھی منعدم ہوں تو رابطہ (ھ) کا عمل نسبت

$$\frac{ف (۱)}{ف (۱)}$$

$$\frac{ف (۱)}{ف (۱)}$$

پر عام کیا جاسکتا ہے۔ اگر اس وقت بھی پیشتر ہی کی صورت رونما ہو تو
رابطہ (ھ) کا عمل بار بار دہرایا جاتا ہے یہاں تک کہ نتیجہ معین صورت
اختیار کر لیتا ہے جبکہ متغیر کی مقررہ قیمت تعویض کی جاتی ہے۔ یعنی
مطلوبہ انتہا مندرجہ ذیل جملوں میں سے پہلا
جملہ جس کی قیمت لا = تعویض کرنے پر معین پائی
جائے گی۔

$$\frac{ف (۱)}{ف (۱)} \dots \dots \dots \frac{ف (۱)}{ف (۱)}$$

توضیحی مثال (۱) نیا لا = کی قیمت دریافت کرد۔

$$\text{حل} \quad \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا} \quad \text{جبکہ لا} = ۱$$

$$\text{پس } \frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{لا} - 1}{\text{لا} - 1} = \frac{\text{فر} (1 - \text{لا})}{\text{فر} (\text{لا} - 1)} \text{ جبکہ } \text{لا} = 1$$

$$= \frac{1}{\text{ن} - 1} \text{ جبکہ } \text{لا} = 1 \text{ یعنی } \frac{1}{\text{ن} - 1}$$

توضیحی مثال (۲) $\frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا} - \text{مس لا}}$ دریافت کرو۔

$$\text{حل} - \frac{(\text{لا} - \text{جب لا})}{(\text{لا} - \text{مس لا})} = 0 \text{ جبکہ } 1 = 0$$

$$\therefore \frac{\text{فر} (\text{لا} - \text{جب لا})}{\text{فر} (\text{لا} - \text{مس لا})} = \frac{1 - \text{جم لا}}{1 - \text{قط لا}} = 0 \text{ جبکہ } \text{لا} = 0$$

یعنی غیر معین ہے۔

پس رابطہ (۸) کے بموجب دوبارہ عمل کرنے سے یعنی دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ و منب نما کو دو دمرجہ تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر} (1 - \text{جم لا})}{\text{فر} (1 - \text{قط لا})} = \frac{\text{جب لا}}{2 - \text{قط لا} - \text{مس لا}}$$

لیکن یہ بھی $\frac{0}{0}$ ہے جبکہ $\text{لا} = 0$ اس لیے مزید ایک بار تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فر} (\text{جب لا})}{\text{فر} (2 - \text{قط لا} - \text{مس لا})} = \frac{\text{جم لا}}{2 - \text{قط لا} - 3 \text{ مس لا}} = \frac{1}{4} \text{ جبکہ } \text{لا} = 0$$

$$\text{پس } \frac{1}{4} = \frac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا} - \text{مس لا}}$$

مثالیں

ذیل کی غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرو:-

$$(۱) \frac{\text{ولا} - \text{قولا} - ۲}{\text{لا} - \text{جب لا}} \text{ جبکہ } \text{لا} = 0 \text{ جواب } 2 =$$

$$(۲) \frac{۲ - ۲ - ۲ + ۲}{۲ + ۲ - ۲} = ۲ \text{ جبکہ } ۲ = ۲ \text{ جواب } = \frac{۲}{۲}$$

$$(۳) \frac{(۲ - ۲) \text{ جب } ۲ - ۲ \text{ جم } ۲ \text{ جبکہ } ۲ = ۲}{۲} = ۰ \text{ جواب } = - \frac{۱}{۳}$$

$$(۴) \text{ دریافت کرو نہا } \frac{\sqrt{۱۱ - ۱۲} - \sqrt{۱۱ - ۱۲}}{\sqrt{۱۱ - ۱۲} - \sqrt{۱۱ - ۱۲}} \text{ جواب } = \frac{۸}{۱۹}$$

۷۔ غیر معین صورت ∞ کی قیمت کی دریافت۔

نہا $\frac{۱}{۱}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جبکہ $۱ = ۱$ کی حالت میں

$\infty = ۱$ اور $\infty = ۱$ اسی قاعدہ پر عمل کیا جاتا ہے جو ∞ کی صورت میں استعمال ہوتا ہے۔ یعنی مطلوبہ انتہا

$$\frac{۱}{۱} = ۱, \frac{۱}{۱} = ۱, \frac{۱}{۱} = ۱, \frac{۱}{۱} = ۱, \frac{۱}{۱} = ۱, \frac{۱}{۱} = ۱$$

میں سے پہلا جملہ ہوگا جس کی قیمت $۱ = ۱$ تعویض کرنے پر معین پائی جائیگی۔ اس کا مضابطہ ثبوت موجودہ نصاب سے بالاتر ہے۔ اس لیے صرف قاعدہ بیان کر دیا گیا۔

توضیحی مثال نہا $\frac{۱}{۱}$ کو $\frac{۱}{۱}$ دریافت کرو۔

$$\text{حل۔} \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \left[\frac{۱}{۱} \right] = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \left[\frac{۱}{۱} \right] = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} = \left[\frac{۱}{۱} \right] = \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱}$$

۱۔ غیر معین صورت $\infty \times \infty$ کی قیمت کی دریافت۔

اگر کوئی تفاعل $f(لا) \times f(لا)$ غیر معین صورت $\infty \times \infty$ اختیار کرتا ہے جبکہ $لا = 1$ تو اس کو شکل

$$\frac{f(لا)}{f(لا)} \quad یا \quad \frac{f(لا)}{f(لا)}$$

لکھ کر بصورت $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کر لیا جاتا ہے اور پھر ان غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے جو قاعدے اوپر بتائے گئے ہیں ان پر عامل کیے جاتے ہیں۔

توضیحی مثال نہی۱۔ $\frac{1}{لا} (1 + لا)$ دریافت کرو۔

حل۔ $\frac{1}{لا} (1 + لا) = \frac{1 + لا}{لا}$ جبکہ $لا < 1$ ۔

لیکن $\frac{1 + لا}{لا}$ صورت $\frac{\infty}{\infty}$ اختیار کر لیتا ہے اور اس لیے غیر معین ہو جاتا ہے جبکہ $لا = 1$ ۔ پس محولہ بالا قاعدہ سے انتہائے مذکور

$$= \frac{1}{لا} - \frac{1}{لا^2} = \frac{1}{لا^2} - \frac{1}{لا} = \frac{1}{لا^2}$$

پس انتہائے مذکور کی قیمت =

۲۔ غیر معین صورت $\infty - \infty$ کی قیمت کی دریافت

ایسے جگہ کو عموماً ایسی کسر میں تحويل کیا جاسکتا ہے جو صورت $\frac{\infty}{\infty}$

یا صورت $\frac{\infty}{\infty}$ اختیار کر لیتی ہے۔

توضیحی مثال۔ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$ دریافت کرو۔

حل۔ یہ تفاعل $\infty - \infty$ ہو جاتا ہے جبکہ $x = 1$

لیکن $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x - (1-x)}{(1-x)(1+x)}$ جبکہ $x \rightarrow 1$

مگر جب $x = 1$ تو یہ آخری تفاعل $\frac{0}{0}$ صورت اختیار کر لیتا ہے۔ پس

محولہ بالا قاعدہ کے استعمال سے تفاعل مذکور $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x - (1-x)}{(1-x)(1+x)}$ اور یہ $\frac{0}{0}$

ہو جاتا ہے جبکہ $x = 1$ عمل دہرانے سے $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x - (1-x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1-x^2}$ حاصل ہوتا ہے

جسے $\frac{2}{0}$ جبکہ $x = 1$ پس

یہ ہوئے جملہ کی انتہا $\frac{2}{0}$

۹۔ غیر معین صورتوں $(\frac{0}{0})$ ، $(\frac{\infty}{\infty})$ کی قیمتوں کی دریافت۔

تفاعل اگر بصورت $f(x)$ (لا) ہو

تو اس کو مندرجہ بالا تین صورتوں میں سے کوئی ایک صورت اختیار کرنے کے لیے ضرور ہے کہ لا کی کسی قیمت کے لیے

$f(x) = (لا) = 0$ ، $f(x) = (لا) = \infty$ اس سے $(\frac{0}{0})$ صورت پیدا ہوگی۔

یا $f(x) = (لا) = 1$ ، $f(x) = (لا) = \infty$ ، $f(x) = (لا) = 0$

یا $f(x) = (لا) = \infty$ ، $f(x) = (لا) = 0$ ، $f(x) = (لا) = \infty$

فرض کرو $\text{ما} = \text{ف (لا)}$ ^{ن (۱)}

دونوں طرف لوکار تم لینے سے $\text{لوک ما} = \text{ف (لا) لوک ف (لا)}$
 اوپر کی ان قسموں میں سے کسی بھی قسم میں ما (یعنی دیے ہوئے تفاعل) کا
 لوکار تم غیر معین صورت $\infty \times 0$ اختیار کر لیتا۔
 پس مسئلہ کے طریقہ سے اس غیر معین صورت کی قیمت دریافت
 کرنے سے دیے ہوئے تفاعل کے لوکار تم کی انتہا دستیاب ہو جاتی ہے۔
 چونکہ یہ تفاعل کے انتہا کے لوکار تم کے مساوی ہے اس لیے تفاعل کی
 انتہا معلوم ہو جاتی ہے۔ کیونکہ

اگر انتہا $\text{لوک ما} = \text{لو}$

توضیحی مثال (۱) نہا (جم لا) دریافت کرو۔

حل (جم لا) کی قیمت ∞ ہو جاتی ہے جبکہ $\text{لا} = 0$ ۔

$\text{لوک (جم لا)} = \frac{1}{\text{لوک جم لا}} = \frac{1}{0} = \infty$ (یعنی فیورمین) جبکہ $\text{لا} = 0$ ۔

لیکن از روئے $\text{نہا (جم لا)} = \frac{\text{لوک جم لا}}{\text{مس}} = 0$ ۔

چونکہ $\text{نہا (جم لا)} = 0$ ۔ اس لیے $\text{لوک نہا (جم لا)} = \infty$ ۔

یعنی $\text{نہا (جم لا)} = \text{لو} = 1$

توضیحی مثال (۲) نہا (مم لا) دریافت کرو۔

حل فرض کرو $\text{ما} = \text{(مم لا) جب لا تب لوک ما} = \text{جب لا لوک مم لا} = \infty \times 0$

جبکہ $\text{لا} = 0$ ۔

پس از روئے $\text{لوک ما} = \frac{\text{لوک مم لا}}{\text{مم لا}} = \frac{\infty}{\infty}$ جبکہ $\text{لا} = 0$ ۔

$$\text{پس از روے مٹ۔ کوک ما} = \frac{\frac{\text{قم لا}}{\text{حم لا}}}{\frac{\text{قم لا حم لا}}{\text{جم لا}}} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}} = ۰$$

جیکہ لا = ۰

یعنی کوک (م لا) جب لا = ۰ پس (م لا) جب لا = ۰ فو = ۱

غیر معین صورتوں سے متعلق متفرق مثالیں

ذیل کی غیر متعین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرو:۔

(۱) نیبا لا ← $\frac{\text{مس لا}}{\text{مس لا ۳}}$ جواب = ۳

(۲) نیبا لا ← $\frac{\text{لا + کوک لا}}{\text{لا کوک لا}}$ جواب = ۰

(۳) نیبا لا ← $\frac{\text{مس لا (۲-لا)}}{\text{مس لا ۳}}$ جواب = $\frac{۲}{۳}$

(۴) نیبا لا ← $\frac{\text{لا قم لا ۲}}{\text{لا ۲}}$ جواب = $\frac{۱}{۲}$

(۵) نیبا لا ← $\left(\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا ۲} \right)$ جواب = $\frac{۱}{لا ۲}$

(۶) نیبا لا ← $\left[\frac{۱}{لا ۲} - \frac{۱}{لا (لا ۳ + ۱)} \right]$ جواب = $\frac{۳}{۴}$

(۷) نیبا لا ← $\frac{\text{لا کوک لا}}{\text{لا ۲}}$ جواب = $\frac{۱}{لا ۲}$

(۸) نیبا لا ← $\frac{۲}{لا ۳}$ جب $\frac{۲}{لا ۳}$ جواب = ۲

$$(۹) \text{ نہی } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{2} \text{ ، جواب } = \frac{2}{\pi}$$

$$(۱۰) \text{ نہی } \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \text{ قسط } \frac{\pi}{4} \text{ ، جواب } = \infty$$

$$(۱۱) \text{ نہی } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ قسط } \frac{\pi}{4} \text{ ، جواب } = 1$$

$$(۱۲) \text{ نہی } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{4} \text{ ، جواب } = \frac{2}{\pi}$$

$$(۱۳) \text{ نہی } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{4} \text{ ، جواب } = \frac{2}{\pi}$$

$$(۱۴) \text{ نہی } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{4} \text{ ، جواب } = \frac{2}{\pi}$$

$$(۱۵) \text{ نہی } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{4} \text{ ، جواب } = \frac{2}{\pi}$$

۱۔ اوسط قیمت کا وسیع تر مسئلہ۔

فرض کرو مستقل سر کی تعریف مساوات ذیل سے ہوتی ہے :-

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi) \quad (1)$$

اور فرض کرو کہ $f(a)$ ایک ایسا تفاعل ہے جو (a) کے سیدھے جانب کے رکن میں b کے عوض لا لکھنے سے بنتا ہے۔ یعنی

$$f(a) = f(a) - f(a) = 0 \quad (2)$$

(۱) سے $f(b) = 0$ اور (۲) سے $f(a) = 0$ پس سہول کے مسئلے (ملاحظہ ہو) لا کی کم از کم ایک قیمت a اور b کے درمیان مثلاً a ایسی ہوگی جو $f(a) = 0$ کو معدوم کر دیگی۔ بدینوجہ چونکہ

$$f(a) = f(a) - f(a) = 0 \quad (3)$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے نتیجہ $f(a) = f(a) - f(a) = 0$ ۔ چونکہ $f(a) = 0$ اور $f(a) = 0$ اس لیے واضح ہے کہ $f(a) = 0$ بھی سہول کے مسئلہ کے شرائط کی تکمیل کرتا ہے لہذا اس کا مشتق یعنی $f'(a)$ کم از کم لا کی ایک قیمت مابین a اور b مثلاً a کے لیے معدوم ہو جانا چاہیے اور اس لیے a بھی a اور b کے درمیان واقع ہے۔ لیکن

$$f(a) = f(a) - f(a) = 0 \quad (4)$$

$$\text{اور } f(a) = f(a)$$

اس نتیجہ کو (۱) میں تعویض کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(\xi) \quad (5)$$

$$(b-a) > 0 \quad (6)$$

اس طریقہ کو جاری رکھنے سے ہمیں یہ عام نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\begin{aligned} & \text{ف (ب)} = \text{ف (۱)} + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۱} + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۲} + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۳} + \dots + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۱۰۰} + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۱۰۱} + \dots + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۱۰۰۰} + \dots \\ & \text{ف (ز)} = \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۱} + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۲} + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۳} + \dots + \frac{\text{ف (۱-ب)}}{۱۰۰} + \dots \end{aligned}$$

مساوات (ز) وسیع تر مسئلہ اوسط قیمت یا وسیع تر مسئلہ اوسط کہلاتی ہے۔

گیارہواں باب

معیاری ابتدائی صوتوں کے تکمیل کے قواعد

۱۔ تکمیل کا تصور بطور مقلوب عمل تفریق -

جس طرح جمع کا مقلوب عمل تفریق ہے یا ضرب کا مقلوب عمل تقسیم یا کسی قوت تک بلند کرنے کا مقلوب عمل اصول کا حصول ہے اسی طرح تفریق کا مقلوب عمل تکمیل ہے - ہم نے کتاب کے تفریقی احصاء والے حصہ میں معلوم کیا ہے کہ کسی دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کا مشتق ف (لا) کس طرح دریافت کیا جاتا ہے - علامتوں کے ذریعہ یہ عمل بشکل

فر لا = ف (لا) ظاہر کیا جاتا ہے یا اگر

تفرقوں کی رتوں میں ظاہر کیا جائے تو بذریعہ فر ف (لا) = ف (لا) فر لا تکمیلی احصاء میں اس کے مقلوب یا متعکس عمل پر بحث کی جاتی ہے - یعنی یہ دریافت کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ دیا ہوا تفاعل کسی دوسرے تفاعل کا مشتق ہے : علامتوں کے ذریعہ اس کو یوں ظاہر کیا جاسکتا ہے کہ اگر

شوق ف (لا) = فہ (لا) دیا جائے تو وہ تفاعل ف (لا) دریافت کیا جائے جس کا یہ مشتق ہے۔ چونکہ تکملی احوال میں تفرق بکثرت استعمال ہوتے ہیں اس لیے فرق (لا) = ف (لا) فرلا = فہ (لا) فرلا لکھ کر سوال ان الفاظ میں پیش کیا جاسکتا ہے کہ ”ایک تفاعل کا تفرق دیا جاتا ہے دریافت کیا جائے کہ خود وہ تفاعل کیا ہے؟“
تفاعل ف (لا) جو اس طرح دریافت کیا جاتا ہے دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکملہ کہلاتا ہے۔ اس کے دریافت کرنے کے عمل کو تکملانا یا تکمل لکھتے ہیں اور اس عمل کا اظہار دیے ہوئے تفرقی جملہ کے آگے علامت تکمل کر لکھ کر کیا جاتا ہے۔ جیسے

(۱) ف (لا) فرلا = ف (لا)

جو عبارت میں پڑھا جاتا ہے ”ف (لا) فرلا کا تکملہ مساوی ہے ف (لا) کے“ تفرق فرلا اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ لا عمل تکمل کا متغیر ہے۔ مثلاً
(۱) اگر ف (لا) = لا تو ف (لا) فرلا = لا فرلا اور
ف (لا) فرلا = لا

(ب) اگر ف (لا) = مس لا تو ف (لا) فرلا = قسط لا فرلا اور
قسط لا فرلا = مس لا

(ج) اگر ف (لا) = لوک لا تو ف (لا) فرلا = ۱/۲ فرلا اور
۱/۲ فرلا = لوک لا

مندرجہ بالا امور سے ظاہر ہے کہ تفرق اور تکمل ایک دوسرے کے معکوس عمل ہیں۔

(۱) تفرق کرنے سے فرق ف (لا) فرلا = ف (لا) فرلا (۲)

بدست ہوتا ہے

اس میں ف (لا) فرلا کی قیمت [= فر (لا)] تعویض کرنے سے

ف (لا) = فر (لا) (۳) برآمد ہوتا ہے

پس لمجاہ نشانات عمل فرلا اور ل فرلا باہر گر مقلوب ہیں۔ یا اگر ہم فرقے استعمال کر رہے ہوں تو فراہ ل علامتیں ایک دوسرے کی مقلوب ہیں۔

جب فر کے بعد ل علامت لکھی جاتی ہے جیسا کہ (۲) میں تو وہ ایک دوسرے کو تلف کر دیتی ہیں۔ لیکن جب ل کے بعد علامت فر لکھی جاتی ہے جیسا کہ

(۳) میں تو عام طور پر ایسا نہیں ہوتا۔ اس کی وجہ ذیل کی فصل میں مکمل کے مستقل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کے ملاحظہ سے فوراً واضح ہو جائیگی۔

۲۔ تکمل کا مستقل۔ نامحدود تکمل۔

سابقہ فصل سے ظاہر ہے کہ

چونکہ فر (لا) = لا فرلا پس ل لا فرلا = لا

چونکہ فر (لا + ۳) = لا فرلا پس ل لا فرلا = لا + ۳

چونکہ فر (لا - ۸) = لا فرلا پس ل لا فرلا = لا - ۸

اسی طرح چونکہ فر (لا + ج) = لا ج جس میں ج کوئی ایک اختیاری مستقل ہے تو

ل لا فرلا = لا + ج

ایسے مستقل کو تکمل کا مستقل کہتے ہیں وہ ایک عدد ہے جو تکمل کے

متغیر کا غیر تاج ہے

پس $ک ف (لا) فرلا = ف (لا) + ج$

اور چونکہ مستقل ج غیر معلوم اور نا محدود ہے اس لیے

جملہ $ف (لا) + ج$ کے لیے نام $ف (لا) فرلا$ کا نا محدود تکملہ رکھا گیا ہے۔

یہ مسئلہ واضح ہے کہ اگر دو تفاعلوں میں ایک

مستقل کا فرق ہے تو ان کا مشتق ایک ہی ہوگا۔

لیکن اس مسئلہ کا مندرجہ ذیل نہیں ہے یعنی اگر $ف (لا)$ ایک ایسا تفاعل ہے کہ اس کا مشتق $ف (لا)$ ہے تو وہ تمام تفاعل جن کا مشتق $ف (لا)$ ہے

$ف (لا) + ج$ کی شکل کے ہوتے ہیں جس میں ج کوئی ایک

مستقل ہے۔

ہم اب ثابت کریں گے کہ اگر دو تفاعلوں کا مشتق ایک ہی

ہو تو ان میں فرق یا تفاوت ایک مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو $ف (لا)$ اور $پ (لا)$ دو تفاعل ہیں جن کا مشتق $ف (لا)$ ہے،

$ف (لا) - پ (لا)$ کو مساوی $ف (لا)$ کے لکھو

تب مفروضہ کی بناء پر $ف (لا) = \frac{ف (لا)}{ف (لا)} [ف (لا) - پ (لا)]$

$= ف (لا) - ف (لا) = ۰ \dots (۱)$

لیکن اوسط قیمت کے مسئلہ کی رو سے

ف (لا + مف لا) - ف (لا)

= مف لا ف (لا + ط ۰ مف لا) ۰ > ط > ا

∴ ف (لا + مف لا) - ف (لا) = ۰

[اس لیے کہ (ا) کی رُو سے ف (لا) کا مشتق لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہے]

لہذا ف (لا + مف لا) = ف (لا)

یعنی ف (لا) = ف (لا) - ۰ (لا) کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ لا میں اضافہ مف لا واقع ہوتا ہے۔ پس بالفاظ دیگر ف (لا) اور ۰ (لا) میں تفاوت صرف ایک مستقل کا ہے۔ کسی دی ہوئی صورت میں مستقل ج کی قیمت دریافت ہو سکتی ہے جبکہ ہمیں تغیر کی کسی قیمت کے لیے نکلہ کی قیمت معلوم ہو۔ آگے چل کر اس کی متعدد مثالوں کے ذریعہ توضیح کی جائیگی۔ یہاں ہم صرف یہ بتانا چاہتے ہیں کہ اگر کوئی تفرقی جملے دیے جائیں تو ان کے نامحدود تکملوں کو کس طرح دریافت کر سکتے ہیں۔

البتہ یہ فرض کر لیا جائیگا کہ ہر ایک مسلسل تفاعل کا ایک تکملہ موجود ہے لیکن اس امر کا باقاعدہ ثبوت اس کتاب کے صیغہ بحث سے باہر ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی نامحدود تکمل کے نتیجہ کی تصدیق اس قاعدہ کے ذریعہ ہو سکتی ہے کہ اس تکمل کا تفرقی دیے ہوئے تفرقی جملہ کے مساوی ہونا چاہیے۔

۳۔ معیاری ابتدائی صورتوں کے تکمل کے قواعد جیسا کہ

م نے اس کتاب احصاء کے آغاز میں دیکھا تفرقی احصاء عمل تفرق کے لیے ایک عام قاعدہ مہیا کر دیتا ہے۔ لیکن تکمیلی احصاء سے ہیں اس کے متناظر کوئی عام قواعد دستیاب نہیں ہوتا جس کی مدد سے فی انفر تکمیل عمل میں لایا جاسکے۔ صرف یہی نہیں بلکہ بعض صورتوں میں ایسا بھی ہوتا ہے کہ اگرچہ ہمیں پہلے سے اس کا علم ہوتا ہے کہ دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمیل موجود ہے تاہم اس کا امکان ہے کہ ہم اس تکمیل کو معلوم تفاعلوں کی رقموں میں فی الواقع دریافت نہ کر سکیں۔ بہر صورت کے لیے ایک خاص طریقہ عمل کی ضرورت ہوتی ہے اور ہم کسی دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمیل عمل تفرق کے اپنی سابقہ معلومات کے توسط ہی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ بالفاظ دیگر ہم اس سوال کے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ وہ کونسا تفاعل ہے جس کو اگر تفرقی کیا جائے تو دیا ہوا تفرقی جملہ حاصل ہوگا۔

ہمیں وجہ معلوم تکملوں کی جدولیں تیار کرنی جاتی ہیں جو معیاری صورتوں کے نام سے موسوم ہیں۔ کسی دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمیل دریافت کرنے کے لیے اس جملہ کا ان معیاری صورتوں سے مقابلہ کر کے دیکھ لیا جاتا ہے کہ آیا وہ ان میں سے کسی ایک کے حامل ہے یا نہیں۔ اگر نہیں ہے تو ہم کوشش کرتے ہیں کہ اس کو مختلف طریقوں سے ان معیاری صورتوں میں سے کسی ایک صورت میں تحویل کریں۔ یہ طریقے مشق ہی سے یاد آتے ہیں۔ اس کتاب کے آئندہ ابواب کا بیشتر حصہ ایسے تفاعلوں کے تکمیل پر مشتمل ہوگا جو عملی مسائل کے حل کرنے میں اکثر استعمال ہوتے ہیں۔

ذیل کے دو قاعدے تفرقی جملوں کو معیاری صورتوں میں تحویل کرنے کے لیے بہت مفید ہیں :-

(۱) تفرقی جملوں کے کسی جبری مجموعہ کا تکمیل ان جملوں کے فرداً فرداً تکملوں کا وہی جبری مجموعہ ہے۔

ثبوت۔ جملہ k فرد + k فرد - k فرد کو تفرق کرنے سے (جس میں k و k ایک واحد متغیر کے تفاعل ہیں۔

فرد + فرد - فرد حاصل ہوتا ہے۔

پس k (فرد + فرد - فرد) = k فرد + k فرد - k فرد (۱)

(ب) مستقل جزو ضربی ملامت تکمیل کے آگے لکھا جاسکتا ہے
یا بعد -

ثبوت - جد $\frac{1}{1}$ فرو کو تفرق کرنے سے
 $\frac{1}{1}$ فرو حاصل ہوتا ہے

پس $\frac{1}{1}$ فرو = $\frac{1}{1}$ فرو

ذیل میں معیاری ابتدائی صورتوں کی ایک مختصر فہرست لکھی جاتی ہے اس کو بطور تکمل
کے ضابطوں کے حفظ کر لینا چاہیے تاکہ ان کے عامل تکملوں کی تعیین آسانی ہو سکے :-
معیاری ابتدائی صورتیں (بالفاظ دیگر تکمل کے ضابطے)

$$(۱) \quad \frac{1}{1} \text{ و فرو} = \frac{1+و}{1+ن} + ج \quad (ن \neq ۱)$$

$$[\text{چونکہ فر} \left(\frac{1+و}{1+ن} + ج \right) = و \text{ فرن}]$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{1} \text{ و فرو} = \frac{1+و}{1+ن} + ج$$

یہ رابطہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے باسثناء ن = ۱ - کے صحیح ہے -
کیونکہ جب ن = ۱ - تو اس صورت میں صفر پر تقسیم کی ضرورت دائمی ہوتی ہے -
صورت ن = ۱ - صورت (۲) میں رُو نہا ہوتی ہے -

$$(۲) \quad \frac{1}{و} \text{ فرو} = \text{لوک و} + ج = \text{لوک و} + \text{لوک و} + ج = \text{لوک و} + ج$$

جس میں ج = لوک و

$$(۳) \quad \frac{1}{و} \text{ فرو} = \frac{1}{و} + ج$$

$$(۴) \quad \frac{1}{و} \text{ فرو} = و + ج$$

$$(۵) \quad \frac{1}{و} \text{ فرو} = - جم + ج$$

$$(۶) \text{ ک جم و فرو} = \text{جب و ج} +$$

$$(۷) \text{ ک قطا و فرو} = \text{مس و ج} +$$

$$(۸) \text{ ک قم و فرو} = \text{م و ج} +$$

$$(۹) \text{ ک قطا و مس و فرو} = \text{قطا و ج} +$$

$$(۱۰) \text{ ک قم و م و فرو} = \text{قم و ج} +$$

$$(۱۱) \text{ ک مس و فرو} = \text{لوک و قطا و ج} +$$

$$[\text{چونکہ ک مس و فرو} = \text{ک جب و فرو} = \text{ک جب و فرو} - \text{ک (جب و فرو)}]$$

$$- \text{لوک و جم و ج} = \text{لوک و قطا و ج} +$$

$$[\text{کیونکہ} - \text{لوک و جم و} = - \text{لوک و} = - \text{لوک} + \text{لوک و} = \text{لوک و قطا و}]$$

$$(۱۲) \text{ ک م و فرو} = \text{لوک و جب و ج} +$$

$$[\text{کیونکہ ک م و فرو} = \text{ک جب و فرو} = \text{ک (جب و فرو)} = \text{لوک و جب و ج} +]$$

$$(۱۳) \text{ ک قطا و فرو} = \text{لوک و (قطا و مس و)} +$$

$$[\text{چونکہ قطا و} = \text{قطا و} + \text{مس و} = \frac{\text{قطا و مس و} + \text{قطا و}}{\text{قطا و مس و}}]$$

$$= \text{ک قطا و فرو} = \text{ک قطا و مس و} + \text{فرو} = \text{ک (قطا و مس و)} +$$

$$= \text{لوک و (قطا و مس و)} + \text{ج} +$$

$$(۱۴) \text{ ک قم و فرو} = \text{لوک و (قم و م و)} + \text{ج} +$$

$$[\text{چونکہ قم و} = \text{قم و} - \text{م و} = \frac{\text{قم و م و}}{\text{م و}}]$$

$$\frac{-\text{قمو ممو} + \text{قمو او}}{\text{قمو} - \text{ممو}} =$$

$$\therefore \int \text{قمو فرو} = \int \frac{-\text{قمو ممو} + \text{قمو او}}{\text{قمو} - \text{ممو}} \text{ فرو} = \int \frac{\text{فرو} (\text{قمو} - \text{ممو})}{\text{قمو} - \text{ممو}}$$

$$= \int \text{لوکر} (\text{قمو} - \text{ممو}) + \text{ج} =$$

$$(15) \int \frac{\text{فرو}}{\text{او} + \text{او}} = \frac{1}{\text{او}} \text{ مس} \frac{1}{\text{او}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ} \text{فرو} (\frac{1}{\text{او}} \text{ مس} \frac{1}{\text{او}} + \text{ج}) = \frac{\text{فرو}}{\text{او} + \text{او}}]$$

$$(16) \int \frac{\text{فرو}}{\text{او} - \text{او}} = \frac{1}{\text{او}} \text{ لوکر} \frac{1}{\text{او}} + \frac{1 - \text{و}}{\text{او} + \text{و}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ} \frac{1}{\text{او} - \text{و}} - \frac{1}{\text{او} + \text{و}} = \frac{1}{\text{او} - \text{و}} = \frac{1}{\text{او} - \text{و}} = \frac{1}{\text{او} - \text{و}}]$$

$$\text{پس} \int \frac{\text{فرو}}{\text{او} - \text{و}} = \int \frac{1}{\text{او} - \text{و}} \text{ فرو} - \int \frac{1}{\text{او} - \text{و}} \text{ فرو} =$$

$$= \frac{1}{\text{او}} \text{ لوکر} \frac{1}{\text{او} - \text{و}} - \frac{1}{\text{او}} \text{ لوکر} \frac{1}{\text{او} + \text{و}} + \text{ج} =$$

$$(17) \int \frac{\text{فرو}}{\text{او} - \text{و}} = \frac{1}{\text{او}} \text{ لوکر} \frac{1}{\text{او} - \text{و}} + \frac{1 + \text{و}}{\text{او} - \text{و}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ} \frac{1}{\text{او} - \text{و}} = \frac{1}{\text{او} - \text{و}} + \frac{1}{\text{او} + \text{و}}]$$

نوٹ - (17) اور (16) کے ملاحظہ سے واضح ہے کہ

$$\int \frac{\text{فرو}}{\text{او} - \text{و}} = - \int \frac{\text{فرو}}{\text{او} - \text{و}}$$

$$(18) \int \frac{\text{فرو}}{\text{او} - \text{و}} = \text{جبنا} \frac{1}{\text{او}} + \text{ج}$$

$$\left[\text{چونکہ } \frac{f}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{f(x)}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$\therefore \int \frac{f}{x^2 - 1} = \int \frac{f}{x} = \int \frac{f}{x} = \int \frac{f}{x} = \int \frac{f}{x}$$

$$(18) \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x} = \int \frac{f}{x} = \int \frac{f}{x} = \int \frac{f}{x}$$

[فرض کرو $x = 1$] اس میں y ایک نیا متغیر ہے

عمل تفرق سے $f = \frac{f}{x^2 \pm 1}$ پس بذریعہ ابدال

$$\int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

$$= \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

$$\text{لیکن } x = 1 \text{ پس } \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

$$= \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

$$= \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

$$= \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

ج = - لوک $x = 1$ ج لکھنے سے حاصل ہوتا ہے رابطہ

$$\int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

اس طرح $x = 1$ لکھنے سے $f = \frac{f}{x^2 \pm 1}$ پس بذریعہ ابدال

$$\int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1} = \int \frac{f}{x^2 \pm 1}$$

$$= \text{لوکر (قہائی + مسی)} + \text{ج} = \text{لوکر (قہائی + [قہائی - (۱ - ج)] + ج}$$

$$\left[6 + \left(\sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{2}{3} \right), \text{کوک} \right] = 6 + \left(\left(1 - \sqrt{\frac{9}{4}} \right) + \frac{2}{3} \right), \text{کوک} =$$

$$(19) \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + C$$

[فرض کرو $و = وجب ی$: $فرو = اوجم ی$ فرضی

اور $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ = جملی

پس $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ و $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (جم ۲) + ۱ فری

$$= \frac{1}{p} \text{ جب } y + \frac{1}{y} + \frac{1}{p} = j$$

وکی تقوں میں نتیجہ حاصل کرنے کے لیے پڑھ کر ی = جب $\frac{1}{2}$ اور جب $\frac{1}{2}$ ی

$$= 2 = 2 \text{ جب } y \text{ جمی} = \frac{2}{1} \frac{y - y_1}{1}$$

اس لیے عمل ابدال سے آخری جملہ = $\frac{2}{3} [(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}]$ جتا $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ [ج

$$(20) \int \sqrt{y^2 \pm 2y + 1} \, dy = \frac{y}{2} \pm \sqrt{y^2 \pm 2y + 1} + \log(y + \sqrt{y^2 \pm 2y + 1}) + C$$

(و = لومسی کہنے سے یہ آسانی معلوم ہو جاتا ہے کہ

(۱) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \int (a \sec \theta) d\theta = a \int \sec \theta d\theta = a \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$

آگے چل کر ہم بتائیں گے کہ

(ب) $\frac{1}{4}$ قطعی مزی = $\frac{1}{4}$ قطعی مزی + $\frac{1}{4}$ لوک (قطعی + مزی) + ج

چونکہ مسی = $\frac{2}{3}$ اور قسطی = $\frac{1}{1+2}$ اس لیے (۱) اور (ب) سے مل جاتا ہے

$$(ج) \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

جس میں ج = ج - $\frac{1}{4}$ ٹوک 1۔ پس رابطہ (۷۰) مستنبط ہو جاتا ہے جسکے مثبت علامت

لی جاتی ہے یعنی $\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ کو $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ ج

منفی علامت کے ساتھ رابطہ (۲۰) ثابت کرنے کے لیے $-$ اقطای کھاجائے تو حاصل ہوگا

$$(د) \quad (ا^۲ - ۲ا - ۲) \div (ا^۲ - ۲ا - ۲) = ۱$$

$$ا^۲ \div ا^۲ = ۱$$

$$- ۲ا \div ا^۲ = - ۲ا$$

(د) کا (ب) سے مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$(۵) \quad (ا^۲ - ۲ا - ۲) \div (ا^۲ - ۲ا - ۲) = ۱$$

لیکن قطی = $\frac{۲}{۱}$ اور اس لیے سی = $\frac{۲}{۱}$ اس طرح (۵) میں عمل ابدال سے

$$حاصل ہوتا ہے $(ا^۲ - ۲ا - ۲) \div (ا^۲ - ۲ا - ۲) = ۱$ کو $(ا^۲ - ۲ا - ۲) \div (ا^۲ - ۲ا - ۲) = ۱$ ج$$

معیاری صورتوں (۱) اور (۲) سے متعلق توضیحی مثالیں

مندرجہ ذیل کو مکمل کرو:-

$$(۱) \quad (ا^۲ + ۲ا - ۲) \div (ا^۲ + ۲ا - ۲)$$

$$= (ا^۲ \div ا^۲) + (۲ا \div ا^۲) - (۲ \div ا^۲)$$

$$= ۱ + ۲ا - ۲$$

$$= ۱ + ۲ا - ۲$$

$$= ۱ + ۲ا - ۲$$

$$(۲) \quad (ا^۲ + ۲ا - ۲) \div (ا^۲ + ۲ا - ۲)$$

$$= (ا^۲ \div ا^۲) + (۲ا \div ا^۲) - (۲ \div ا^۲)$$

مثالیں

مندرجہ ذیل کو معیاری صورت کے فرو میں تبدیل کر کے مکمل کرو:-

جواب = $\frac{2}{3} \sqrt{a} + \frac{2}{5} \sqrt{b} + \frac{2}{7} \sqrt{c} + \frac{2}{9} \sqrt{d}$ (۱) کے $(1 + \sqrt{a})^2$ فرما

" = $\frac{1}{4} (3 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۲) کے $\frac{(1 + \sqrt{a})^2}{4(3 + \sqrt{a} + \sqrt{b})}$ فرما

" = $\frac{1}{3} (2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۳) کے $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ فرما

" = $\frac{1}{4} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۴) کے $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{4(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a})^2$ (۵) کے $\frac{2 + \sqrt{a}}{4}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a})^2$ (۶) کے $\frac{2 + \sqrt{a}}{4}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a})^2$ (۷) کے $\frac{2 + \sqrt{a}}{4}$ فرما

مندرجہ ذیل کو معیاری صورت کے فرو میں تبدیل کر کے مکمل کرو:-

جواب = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۸) کے $\frac{(1 + \sqrt{a})^2}{4(2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۹) کے $\frac{1}{4(2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۱۰) کے $\frac{2 + \sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۱۱) کے $\frac{2 + \sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$ فرما

" = $\frac{1}{4} (2 + \sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ (۱۲) کے $\frac{2 + \sqrt{a} + \sqrt{b}}{4}$ فرما

معیاری صورتوں (۳) اور (۴) سے متعلق توضیحی مثالیں

ثابت کرو :-

$$(1) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$1 = 1 \times 1 \text{ لکھو تب } 1 = 1 \times 1 \text{ اور } \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \text{ (۱۲)}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\text{فرض کہ } u = \frac{1}{x} \text{ تو } \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \text{ دیا ہوا تکمیل } = \int \frac{1}{x^2} dx = \int -\frac{1}{x^2} \cdot (-1) dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C$$

مثالیں

مندرجہ ذیل کو معیاری صورتوں کے اندر تبدیل کر کے تکمیل کرو :-

$$(1) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \text{ جواب } = \tan^{-1} x + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x}{3} + C$$

$$(4) \int \frac{1}{x^2 + 16} dx = \frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x}{4} + C$$

$$(5) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

معیاری صورتوں (۵) تا (۱۴) سے متعلق مثالیں

ثابت کرو :-

$$(۱) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم} (۱+۷۲)} = -\frac{۱}{۲} \text{جم} (۱+۷۲) + \text{ج}$$

$$(۲) \int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم} ۷۳۱} = \frac{۱}{۳۱} \text{مس} ۷۳۱ + \text{ج}$$

$$(۳) \int (۱-۷) \text{جب} (۱+۷۲-۷۲) \text{فرلا} = -\frac{۱}{۲} \text{جم} (۱+۷۲-۷۲) + \text{ج}$$

$$(۴) \int (۱-۷۲) \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{مس} ۷۲ + \text{لوک} \text{جم} ۷۲ + \text{ج}$$

$$(۵) \int \frac{\text{قط} ۷ \text{فرلا}}{۱+۷ \text{مس}} = \text{لوک} (۱+۷ \text{مس}) + \text{ج}$$

$$(۶) \int \text{قم} (\text{لوک} ۷) \text{فرلا} = \frac{۷}{۱} - \frac{۱}{۲} \text{مم} (\text{لوک} ۷) + \text{ج}$$

$$(۷) \int \frac{\text{فرط}}{۲ \text{جب} ۲} = \text{لوک} (\text{قم} \frac{۲}{۲} - \text{مم} \frac{۲}{۲}) + \text{ج}$$

$$(۸) \int \frac{\text{جب} (\text{مس} ۷) \text{فرلا}}{۷+۱} = -\text{جم} (\text{مس} ۷) + \text{ج}$$

$$(۹) \int \text{قم} ۷ \text{مم} ۷ \text{فرلا} = \frac{\text{فرلا}}{۷} - ۲ \text{قم} ۷ + \text{ج}$$

$$(۱۰) \int \frac{\text{مس} ۲ \text{فرط}}{\text{جم} ۲} = \frac{۱}{۲} \text{قط} ۲ + \text{ج}$$

$$(۱۱) \int \text{مس} ۷ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} \text{قط} ۷ + \text{ج}$$

$$(۱۲) \int \text{لاقط} ۷ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} (\text{قط} ۷ + \text{مس} ۷) + \text{ج}$$

$$(۱۳) \int \text{قم} \sqrt{۳۳} \text{ لا فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{۳۳}} \text{وک} (\text{قم} \sqrt{۳۳} - \text{مم} \sqrt{۳۳}) + \text{ج}$$

$$(۱۴) \int ۲ \text{ مم} \sqrt{۳۳} \text{ لا فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{۳۳}} \text{وک جب} ۷۶ + \text{ج}$$

$$(۱۵) \int \frac{\text{قطر} \sqrt{۳۳} \text{ لا فرلا}}{\sqrt{۳۳} \text{ لا} + ۲} = \text{وک} (\text{مس} \sqrt{۳۳} + ۲) + \text{ج}$$

بقیہ یعنی (۱۵) سے (۲۰) تک کی معیاری صورتوں سے متعلق

توضیحی مثالیں

نکٹن کرو:-

$$(۱) \int \frac{\text{فرلا}}{۱ + \sqrt{۳} \text{ لا} + ۲} \text{ یہ معیاری صورت (۱۵) کے مشابہ ہے}$$

$$\text{اور} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{فر} (\sqrt{۳} \text{ لا})}{۱ + \sqrt{۳} (\sqrt{۳} \text{ لا})} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{مس} \sqrt{۳} \text{ لا} + ۲}{\sqrt{۳} \text{ لا} + ۲} + \text{ج}$$

$$(۲) \int \frac{\text{فرلا}}{۱ - \sqrt{۳} \text{ لا} + ۹} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{فر} (\sqrt{۳} \text{ لا})}{۱ - \sqrt{۳} (\sqrt{۳} \text{ لا})} \text{ یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۱۶) کے}$$

$$\text{اور} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{وک} \sqrt{۳} \text{ لا}}{۱ + \sqrt{۳} \text{ لا}} + \text{ج} = \frac{۱}{۳} \int \frac{\text{وک} \sqrt{۳} \text{ لا}}{۱ + \sqrt{۳} \text{ لا}} + \text{ج}$$

$$(۳) \int \frac{۲ \text{ فر} \sqrt{۳} \text{ لا}}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{فر} \sqrt{۳} \text{ لا}}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} \text{ جو مشابہ ہے معیاری صورت (۱۷) کے}$$

$$\text{اور} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{۱}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{وک} \sqrt{۳} \text{ لا}}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} + \text{ج} = \frac{۱}{۳} \int \frac{\text{وک} \sqrt{۳} \text{ لا}}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{وک} \sqrt{۳} \text{ لا}}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} + \text{ج}$$

$$(۴) \int \frac{۳ \text{ فر} \sqrt{۳} \text{ لا}}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \int \frac{\text{فر} (\sqrt{۳} \text{ لا})}{\sqrt{۳} \text{ لا} - ۳} \text{ جو مشابہ ہے معیاری صورت (۱۸) کے}$$

$$\text{اور } ۲ = \text{جب } \frac{۱۱}{۲۱} + ج$$

$$(۵) \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱۱+۱۱۶-۲۱۱}} = \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(۲۱) + ۲(۳-۱۱)}} \quad \text{جو مشابہ معیاری صورت (۱۸) کے}$$

$$\text{اور } = \text{لوکر } \left\{ \sqrt{۲+(۹+۱۱۶-۲۱۱)} + (۱-۱۱) \right\} + ج$$

$$= \text{لوکر } \left\{ \sqrt{۱۱+۱۱۶-۲۱۱} + (۳-۱۱) \right\} + ج$$

$$(۶) \int \sqrt{۱۱۹-۲۱۱} \text{ فرلا} = \int \frac{۱}{۲} \int \sqrt{(۱۱۳) - ۲(۲۱)} \text{ فر (۱۳)} \\ \text{یہ مشابہ معیاری صورت (۱۹) کے}$$

$$\text{اور } = \frac{۱}{۳} \left\{ \frac{۱۱۳}{۲} + \sqrt{۱۱۹-۲۱۱} + \text{جب } \frac{۲}{۲} + \frac{۱۱۳}{۲} + ج \right.$$

$$= \frac{۱۱}{۲} + \sqrt{۱۱۹-۲۱۱} + \text{جب } \frac{۲}{۲} + \frac{۱۱۳}{۲} + ج$$

$$(۷) \int \frac{۱}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} = \int \frac{۱}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} \text{ فر (۱۵)} \\ \text{یہ مشابہ معیاری صورت (۲۰) کے}$$

$$\text{اور } = \frac{۱}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} \left\{ \frac{۱۱۳}{۲} \pm \sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵} + (۱۱۳) \text{ لوکر } \right\} + ج$$

$$= \frac{۱۱}{۲} \pm \sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵} + (۱۱۳) \text{ لوکر } + ج$$

[نوٹ (۱) طالب علم نے دیکھ لیا ہوگا کہ معیاری صورت ۱۶ اور ۱۷ (۱) کے کتبوں میں

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} = - \int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} \text{ کا رشتہ ہے۔ پس ان میں سے حسب ضرورت کسی ایک صورت}$$

کا ضابطہ استعمال ہو سکتا ہے۔ جہاں تک ممکن ہو ایک ہی صورت کا ضابطہ استعمال کرنا مناسب ہے۔

نوٹ (۲) طالب علم کو بطور خود حسب ذیل ضابطہ اخذ کرنے میں کوئی دقت نہ ہونی چاہئے۔

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} + ج = - \frac{۱}{\sqrt{۱۱۳ \pm ۲۱۱۵}} + ج$$

$$\int \frac{فرو}{\sqrt{۱-۲و}} = \int ج + \frac{و}{۲} = -\frac{۱}{۲} \int ج + \frac{و}{۲} \quad اور \quad \int \frac{فرو}{\sqrt{۱-۲و}} = \int ج + \frac{و}{۲} = -\frac{۱}{۲} \int ج + \frac{و}{۲}$$

مثالیں

ثابت کرو :-

$$(۱) \int \frac{فرو}{۵+۱۲و+۲و^۲} = \frac{۱}{۲} \int \frac{فرو}{۱+۲و} + ج$$

$$[اشارہ \quad ۱+۲و+۲و^۲ = ۵+۱۲و+۲و^۲ = ۲(۱+۲و) + ۱]$$

$$(۲) \int \frac{۲فرو}{۲و-۱۱+۲و^۲} = ۲ \int ج + \frac{۱-۱۱و}{۲} = ۲ \int ج + \frac{۱-۱۱و}{۲}$$

$$(۳) \int \frac{فرو}{۴-۱۱و+۲و^۲} = \frac{۱}{۱۰} \int \frac{فرو}{۴-۱۱و+۲و^۲} + ج$$

$$(۴) \int \frac{فرو}{۸-۱۱و-۲و^۲} = \frac{۱}{۱۸} \int \frac{فرو}{۸-۱۱و-۲و^۲} + ج$$

$$(۵) \int \frac{۸فرو}{۹+۱۱و+۲و^۲} = \frac{۱}{۲۱} \int \frac{فرو}{۹+۱۱و+۲و^۲} + ج$$

$$(۶) \int \frac{۲فرو}{۲و^۲-۱۱و-۵} = \frac{۲}{۱۹} \int ج + \frac{۲+۱۱و}{۱۹}$$

$$(۷) \int \frac{فرو}{۲و^۲+۱۱و+۵} = \frac{۱}{۲} \int ج + \frac{۵+۱۱و}{۲}$$

$$(۸) \int \frac{۱۱فرو}{۲و^۲-۱۱و-۱} = \frac{۱}{۴} \int ج + \frac{۱۱و-۱۱}{۴}$$

$$(۹) \int \frac{۱۱فرو}{۲و^۲-۱۱و+۲و^۲} = ۳ \int ج + \frac{۲-۱۱و}{۲}$$

$$\frac{3}{\sqrt{5+11x-2x^2}} = \frac{3}{\sqrt{5+11x-2x^2}} \int (10)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5+11x-2x^2}} + (1-11x) \text{ کوک} -$$

$$(11) \int \sqrt{5+11x-2x^2} = \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

$$(12) \int \sqrt{5+11x-2x^2} = \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

$$+ \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

$$(13) \int \sqrt{5+11x-2x^2} = \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

$$(14) \int \sqrt{5+11x-2x^2} = \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

$$+ \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

$$(15) \int \sqrt{5+11x-2x^2} = \frac{3}{2} \sqrt{5+11x-2x^2} + \frac{5}{2} \text{ جبکہ } + \frac{3}{2} \text{ ج}$$

۳۔ مثلثی تفرق (igonometric differential)

بعض مثلثی تفرق بکثرت استعمال ہوتے ہیں اور ساتھ ہی اس کے سادہ مثلثی تخویر ذریعہ معیاری صورتوں میں ڈھالے جا کر آسانی تکمیل کیے جاسکتے ہیں۔ یہاں ہم تفرقوں اور ان کے مکمل کے طریقوں پر غور کریں گے۔

مثال ۱: جب x و y کی تعیین

جبکہ m یا n میں سے کوئی ایک مثبت طاق صحیح عدد ہوتا ہے (علی الرغم) کہ دوسرا عدد خواہ کچھ ہی ہو (یہ مکمل سادہ استحالوں کے ذریعہ معیاری صورت) ہے

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + C$$

میں تبدیل کر کے عمل میں لایا جاسکتا ہے۔

مثلاً اگر م طاق ہے تو ہم کہتے ہیں جب $\frac{1}{2}$ = جب $\frac{1}{2}$ جب $\frac{1}{2}$

پس چونکہ م۔ ا جفت ہے تو مساوات کے بائیں جانب کے رکن کی پہلی رقم جب $\frac{1}{2}$ کی کوئی طاقت ہوگی اور بذریعہ ضابطہ جب $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ - جم $\frac{1}{2}$ اس کو ہم جم کی طاقتوں میں ظاہر کر سکیں گے۔ اس لیے مکملہ مذکور صورت ذیل میں لکھا جاسکیگا:

(۱) $\frac{1}{2}$ (مجموعہ جس میں جم کی رقیں شامل ہوگی) جب $\frac{1}{2}$ فر $\frac{1}{2}$ اور چونکہ جب $\frac{1}{2}$ فر $\frac{1}{2}$ = - فر (جم $\frac{1}{2}$) ہر رقم جس کو مکمل کرنا ہوگا بصورت ذیل فر ہوگی جس میں $\frac{1}{2}$ = جم $\frac{1}{2}$

اس طرح اگر ن ایک طاق عدد ہے تو جم $\frac{1}{2}$ = جم $\frac{1}{2}$ دیکھو اور جم $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ - جب $\frac{1}{2}$ تعویض کرو۔ تب مکملہ بصورت

(۲) $\frac{1}{2}$ (مجموعہ جس میں جب کی رقیں شامل ہوگی) جم $\frac{1}{2}$ فر $\frac{1}{2}$ اور چونکہ جم $\frac{1}{2}$ فر $\frac{1}{2}$ = - فر (جب $\frac{1}{2}$) ہر رقم جس کو مکمل کرنا ہوگا بصورت ذیل ہوگی جس میں $\frac{1}{2}$ = جب $\frac{1}{2}$

توضیحی مثال (۱) $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ دریافت کرو۔

حل۔ مکملہ = $\frac{1}{2}$ (جب $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) فر $\frac{1}{2}$

= $\frac{1}{2}$ (۱- جم $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) فر $\frac{1}{2}$

= $\frac{1}{2}$ (۱- جم $\frac{1}{2}$ + جم $\frac{1}{2}$) جب $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) فر $\frac{1}{2}$

= $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) - $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) + $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) جب $\frac{1}{2}$ فر $\frac{1}{2}$

= $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) - $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) + $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) فر (جم $\frac{1}{2}$)

= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) + $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) + $\frac{1}{2}$ (جم $\frac{1}{2}$) ج

$$2 - = (جم لا) \frac{1}{2} (1 - \frac{2}{5} جم^2 + \frac{4}{9} جم^3) + ج$$

$$2 - = (جم لا) (1 - \frac{2}{5} جم^2 + \frac{4}{9} جم^3) + ج$$

توضیحی مثال (۲) $\frac{مس^3 و}{قط^2 و}$ فرو دریافت کرو

حل۔ تکملہ = $مس^2 و$ جم^۲ و فرو = $ج ب^2 و$ جم^۲ و فرو

$$= ج ب^2 و جب و جم^2 و فرو = (1 - جم^2 و) ج ب و (جم و) فرو$$

$$= ج ب و جم^2 و فرو - ج ب و جم و ب و فرو$$

$$= - (جم و) فر (جم و) + ج ب و فر (جم و)$$

$$= - ج ب و فر (جم و) + \frac{ج ب و^2 (جم و)}{2} + ج$$

$$= - لوک جم و + \frac{1}{4} جم^2 و + ج$$

توضیحی مثال (۳) $جم^3 \frac{لا}{3}$ فرلا دریافت کرو

حل۔ تکملہ = $جم^2 \frac{لا}{3}$ جم^۲ فرلا = $(1 - جب^2 \frac{لا}{3}) جم^2 \frac{لا}{3}$ فرلا

$$= (جم \frac{لا}{3} - جب^2 \frac{لا}{3} جم \frac{لا}{3}) فرلا$$

$$= \frac{3}{4} ج ب^2 فر \frac{لا}{3} - \frac{3}{4} ج (جب \frac{لا}{3}) فر (جب \frac{لا}{3})$$

$$= \frac{3}{4} ج ب^2 فر \frac{لا}{3} - \frac{3}{4} ج (جب \frac{لا}{3})^2 فر$$

$$= \frac{3}{4} ج ب (جب \frac{لا}{3}) - \frac{1}{4} ج ب^3 (\frac{لا}{3}) + ج$$

مشاکلین

مندرجہ ذیل نتائج حاصل کرو:-

$$(۱) \text{ جب } ۱ \text{ جم } ۱ \text{ فر } = \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} \text{ ج}$$

$$(۲) \text{ جب } \frac{۱۲}{۱۰} \text{ جم } ۱ \text{ فر } = \frac{۱}{۱۰} \text{ قط } ۱۲ \text{ ج}$$

$$(۳) \text{ جب } \frac{۱۲}{۱۰} \text{ جم } ۱۲ \text{ فر } = \frac{۱}{۱۰} \text{ جم } \frac{۲}{۱۰} - \frac{۱}{۱۰} \text{ جم } \frac{۲}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} \text{ ج}$$

$$(۴) \text{ جب } \frac{۱۲}{۱۰} \text{ مس } ۱ \text{ فر } = ۲ - ۱ \text{ جم } ۱۲ \text{ ج}$$

$$(۵) \text{ جب } \frac{۱۲}{۱۰} \text{ فر } = \frac{۱}{۱۰} \text{ جم } \frac{۲}{۱۰} - ۵ \text{ جم } \frac{۲}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} \text{ ج}$$

(ب) مس ۱ فر یا ۱ جم ۱ فر کی تعیین

ان صورتوں کا مکمل سابقہ صورت یعنی (۱) کے مکمل کے لیے جو طریقہ اختیار کیا گیا تھا اس کے مشابہ طریقہ سے باسانی دریافت ہو سکتا ہے جبکہ ان ایک صبح مدد ہے چنانچہ

$$\text{مس } ۱ \text{ فر } = \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ = \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ (قط } ۱ \text{ فر)}$$

$$= \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ قط } ۱ - \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر}$$

$$= \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر (مس } ۱) - \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ (قط } ۱ \text{ فر)}$$

$$= \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر (مس } ۱) - \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ قط } ۱ \text{ فر}$$

$$+ \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر}$$

$$= \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر (مس } ۱) + \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر (مس } ۱)$$

$$+ \text{مس } ۱ \text{ مس } ۱ \text{ فر}$$

$$= \frac{\text{مس } ۱}{۱-۱۰} - \frac{\text{مس } ۱}{۲-۱۰} + \text{مس } ۱ \text{ فر } + \text{ج}$$

اسی طرح عمل جاری رہے یہاں تک کہ باب سے آخر جو رقم اس منہ، فرد حاصل ہو
اس میں ن - م = ۲ یا ۱ بطور توضیح مثال

$$(1) \int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \text{مسقطاً طرفه} \dots \text{مسقطاً طرفه} = \text{مسقطاً طرفه (مسقط)}$$

- مسقط (قطر - ۱) فرطه

$$= \text{[مسٹر (مس) - [مسٹر (مس) + [مسٹر (مس) فرط}$$

$$= \text{مس لہ فر (مس ط)} - \text{مس لہ فر (مس ط)} + \text{قط ط فر ط} - \text{فر ط}$$

$$= \frac{1}{8} \text{ مس } ٨ - \frac{1}{12} \text{ مس } ٩ + \text{ مس } ١٠ - ١١ + \text{ ج}$$

اسی طرح آسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ا من م فرط} = \frac{1}{4} \text{ من م} - \frac{1}{4} \text{ من م} + \text{لوک قطط} + \text{ج}$$

کہ مومن و فرس کی تعیین کے لیے بھی ایسا ہی عمل کیا جاتا ہے

چنانچه $f_m = f_{m-1} + f_{m-2}$ ، $f_{m-1} = f_{m-2} + f_{m-3}$ ، $f_{m-2} = f_{m-3} + f_{m-4}$ ، ...، $f_2 = f_1 + f_0$ ، $f_1 = f_0 + f_{-1}$ ، $f_0 = f_{-1} + f_{-2}$ ، ...، $f_{-1} = f_{-2} + f_{-3}$ ، ...، $f_{-2} = f_{-3} + f_{-4}$ ، ...، $f_{-3} = f_{-4} + f_{-5}$ ، ...، $f_{-4} = f_{-5} + f_{-6}$ ، ...، $f_{-5} = f_{-6} + f_{-7}$ ، ...، $f_{-6} = f_{-7} + f_{-8}$ ، ...، $f_{-7} = f_{-8} + f_{-9}$ ، ...، $f_{-8} = f_{-9} + f_{-10}$ ، ...، $f_{-9} = f_{-10} + f_{-11}$ ، ...، $f_{-10} = f_{-11} + f_{-12}$ ، ...، $f_{-11} = f_{-12} + f_{-13}$ ، ...، $f_{-12} = f_{-13} + f_{-14}$ ، ...، $f_{-13} = f_{-14} + f_{-15}$ ، ...، $f_{-14} = f_{-15} + f_{-16}$ ، ...، $f_{-15} = f_{-16} + f_{-17}$ ، ...، $f_{-16} = f_{-17} + f_{-18}$ ، ...، $f_{-17} = f_{-18} + f_{-19}$ ، ...، $f_{-18} = f_{-19} + f_{-20}$ ، ...، $f_{-19} = f_{-20} + f_{-21}$ ، ...، $f_{-20} = f_{-21} + f_{-22}$ ، ...، $f_{-21} = f_{-22} + f_{-23}$ ، ...، $f_{-22} = f_{-23} + f_{-24}$ ، ...، $f_{-23} = f_{-24} + f_{-25}$ ، ...، $f_{-24} = f_{-25} + f_{-26}$ ، ...، $f_{-25} = f_{-26} + f_{-27}$ ، ...، $f_{-26} = f_{-27} + f_{-28}$ ، ...، $f_{-27} = f_{-28} + f_{-29}$ ، ...، $f_{-28} = f_{-29} + f_{-30}$ ، ...، $f_{-29} = f_{-30} + f_{-31}$ ، ...، $f_{-30} = f_{-31} + f_{-32}$ ، ...، $f_{-31} = f_{-32} + f_{-33}$ ، ...، $f_{-32} = f_{-33} + f_{-34}$ ، ...، $f_{-33} = f_{-34} + f_{-35}$ ، ...، $f_{-34} = f_{-35} + f_{-36}$ ، ...، $f_{-35} = f_{-36} + f_{-37}$ ، ...، $f_{-36} = f_{-37} + f_{-38}$ ، ...، $f_{-37} = f_{-38} + f_{-39}$ ، ...، $f_{-38} = f_{-39} + f_{-40}$ ، ...، $f_{-39} = f_{-40} + f_{-41}$ ، ...، $f_{-40} = f_{-41} + f_{-42}$ ، ...، $f_{-41} = f_{-42} + f_{-43}$ ، ...، $f_{-42} = f_{-43} + f_{-44}$ ، ...، $f_{-43} = f_{-44} + f_{-45}$ ، ...، $f_{-44} = f_{-45} + f_{-46}$ ، ...، $f_{-45} = f_{-46} + f_{-47}$ ، ...، $f_{-46} = f_{-47} + f_{-48}$ ، ...، $f_{-47} = f_{-48} + f_{-49}$ ، ...، $f_{-48} = f_{-49} + f_{-50}$ ، ...، $f_{-49} = f_{-50} + f_{-51}$ ، ...، $f_{-50} = f_{-51} + f_{-52}$ ، ...، $f_{-51} = f_{-52} + f_{-53}$ ، ...، $f_{-52} = f_{-53} + f_{-54}$ ، ...، $f_{-53} = f_{-54} + f_{-55}$ ، ...، $f_{-54} = f_{-55} + f_{-56}$ ، ...، $f_{-55} = f_{-56} + f_{-57}$ ، ...، $f_{-56} = f_{-57} + f_{-58}$ ، ...، $f_{-57} = f_{-58} + f_{-59}$ ، ...، $f_{-58} = f_{-59} + f_{-60}$ ، ...، $f_{-59} = f_{-60} + f_{-61}$ ، ...، $f_{-60} = f_{-61} + f_{-62}$ ، ...، $f_{-61} = f_{-62} + f_{-63}$ ، ...، $f_{-62} = f_{-63} + f_{-64}$ ، ...، $f_{-63} = f_{-64} + f_{-65}$ ، ...، $f_{-64} = f_{-65} + f_{-66}$ ، ...، $f_{-65} = f_{-66} + f_{-67}$ ، ...، $f_{-66} = f_{-67} + f_{-68}$ ، ...، $f_{-67} = f_{-68} + f_{-69}$ ، ...، $f_{-68} = f_{-69} + f_{-70}$ ، ...، $f_{-69} = f_{-70} + f_{-71}$ ، ...، $f_{-70} = f_{-71} + f_{-72}$ ، ...، $f_{-71} = f_{-72} + f_{-73}$ ، ...، $f_{-72} = f_{-73} + f_{-74}$ ، ...، $f_{-73} = f_{-74} + f_{-75}$ ، ...، $f_{-74} = f_{-75} + f_{-76}$ ، ...، $f_{-75} = f_{-76} + f_{-77}$ ، ...، $f_{-76} = f_{-77} + f_{-78}$ ، ...، $f_{-77} = f_{-78} + f_{-79}$ ، ...، $f_{-78} = f_{-79} + f_{-80}$ ، ...، $f_{-79} = f_{-80} + f_{-81}$ ، ...، $f_{-80} = f_{-81} + f_{-82}$ ، ...، $f_{-81} = f_{-82} + f_{-83}$ ، ...، $f_{-82} = f_{-83} + f_{-84}$ ، ...، $f_{-83} = f_{-84} + f_{-85}$ ، ...، $f_{-84} = f_{-85} + f_{-86}$ ، ...، $f_{-85} = f_{-86} + f_{-87}$ ، ...، $f_{-86} = f_{-87} + f_{-88}$ ، ...، $f_{-87} = f_{-88} + f_{-89}$ ، ...، $f_{-88} = f_{-89} + f_{-90}$ ، ...، $f_{-89} = f_{-90} + f_{-91}$ ، ...، $f_{-90} = f_{-91} + f_{-92}$ ، ...، $f_{-91} = f_{-92} + f_{-93}$ ، ...، $f_{-92} = f_{-93} + f_{-94}$ ، ...، $f_{-93} = f_{-94} + f_{-95}$ ، ...، $f_{-94} = f_{-95} + f_{-96}$ ، ...، $f_{-95} = f_{-96} + f_{-97}$ ، ...، $f_{-96} = f_{-97} + f_{-98}$ ، ...، $f_{-97} = f_{-98} + f_{-99}$ ، ...، $f_{-98} = f_{-99} + f_{-100}$ ، ...، $f_{-99} = f_{-100} + f_{-101}$ ، ...، $f_{-100} = f_{-101} + f_{-102}$ ، ...، $f_{-101} = f_{-102} + f_{-103}$ ، ...، $f_{-102} = f_{-103} + f_{-104}$ ، ...، $f_{-103} = f_{-104} + f_{-105}$ ، ...، $f_{-104} = f_{-105} + f_{-106}$ ، ...، $f_{-105} = f_{-106} + f_{-107}$ ، ...، $f_{-106} = f_{-107} + f_{-108}$ ، ...، $f_{-107} = f_{-108} + f_{-109}$ ، ...، $f_{-108} = f_{-109} + f_{-110}$ ، ...، $f_{-109} = f_{-110} + f_{-111}$ ، ...، $f_{-110} = f_{-111} + f_{-112}$ ، ...، $f_{-111} = f_{-112} + f_{-113}$ ، ...، $f_{-112} = f_{-113} + f_{-114}$ ، ...، $f_{-113} = f_{-114} + f_{-115}$ ، ...، $f_{-114} = f_{-115} + f_{-116}$ ، ...، $f_{-115} = f_{-116} + f_{-117}$ ، ...، $f_{-116} = f_{-117} + f_{-118}$ ، ...، $f_{-117} = f_{-118} + f_{-119}$ ، ...، $f_{-118} = f_{-119} + f_{-120}$ ، ...، $f_{-119} = f_{-120} + f_{-121}$ ، ...، $f_{-120} = f_{-121} + f_{-122}$ ، ...، $f_{-121} = f_{-122} + f_{-123}$ ، ...، $f_{-122} = f_{-123} + f_{-124}$ ، ...، $f_{-123} = f_{-124} + f_{-125}$ ، ...، $f_{-124} = f_{-125} + f_{-126}$ ، ...، $f_{-125} = f_{-126} + f_{-127}$ ، ...، $f_{-126} = f_{-127} + f_{-128}$ ، ...، $f_{-127} = f_{-128} + f_{-129}$ ، ...، $f_{-128} = f_{-129} + f_{-130}$ ، ...، $f_{-129} = f_{-130} + f_{-131}$ ، ...، $f_{-130} = f_{-131} + f_{-132}$ ، ...، $f_{-131} = f_{-132} + f_{-133}$ ، ...، $f_{-132} = f_{-133} + f_{-134}$ ، ...، $f_{-133} = f_{-134} + f_{-135}$ ، ...، $f_{-134} = f_{-135} + f_{-136}$ ، ...، $f_{-135} = f_{-136} + f_{-137}$ ، ...، $f_{-136} = f_{-137} + f_{-138}$ ، ...، $f_{-137} = f_{-138} + f_{-139}$ ، ...، $f_{-138} = f_{-139} + f_{-140}$ ، ...، $f_{-139} = f_{-140} + f_{-141}$ ، ...، $f_{-140} = f_{-141} + f_{-142}$ ، ...، $f_{-141} = f_{-142} + f_{-143}$ ، ...، $f_{-142} = f_{-143} + f_{-144}$ ، ...، $f_{-143} = f_{-144} + f$

اور بالآخر = $\frac{(م)^{1-n}}{1-n} + \frac{(م)^{2-n}}{2-n} + \dots + \frac{(م)^{r-n}}{r-n} + \dots$

بطور توضیحی مثال

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{x^2} dx$$

$$= - \int \frac{r}{r^2} \frac{dr}{r} + \int \frac{r}{r^2} \frac{dr}{r} + \int \frac{r}{r^2} \frac{dr}{r} =$$

$$2 = 2 \text{ م}^2 \text{ فر} - (2 \text{ م}^2 \text{ فر}) + 2 \text{ م}^2 \text{ فر} =$$

$$= 2 \text{ م}^2 \text{ فر} + 2 \text{ م}^2 \text{ فر} + 2 \text{ م}^2 \text{ فر} + 2 \text{ م}^2 \text{ فر} =$$

(ج) ۲ قط و فر یا ۲ ق م و فر کی تعیین۔

ن جب ایک مثبت جنت صحیح عدد ہوتا ہے تو ان مکملوں کی قیمت آسانی سے معلوم کر لی جاسکتی ہے۔ سب سے پہلے ان مکملوں کو بصورت ذیل لکھا جائے:

$$2 \text{ قط} = 2 \text{ ق م} = (2 \text{ م}^2 + 1) \text{ ق م} =$$

$$2 \text{ ق م} = 2 \text{ ق م} = (2 \text{ م}^2 + 1) \text{ ق م} =$$

ذیل کی مثال سے بقیہ طریقہ عمل واضح ہو جائیگا:

$$2 \text{ ق م} = 2 \text{ ق م} = (2 \text{ م}^2 + 1) \text{ ق م} = 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} =$$

$$= 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} =$$

$$= 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} =$$

$$= 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} + 2 \text{ ق م} =$$

(د) ۲ م و قط و فر یا ۲ م و ق م و فر کی تعیین۔

جبکہ ن ایک مثبت جنت صحیح عدد ہوتا ہے تو سابقہ صورت کی طرح عمل کیا جاتا ہے۔

مثلاً ۲ م و قط و فر کی تعیین میں قط و فر کے عوض (۲ م + ۱) قط و

مکمل۔ ۲ م و قط و فر + ۲ م و قط و فر

$$= \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{فر} (\text{مس} \text{لا}) + \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{فر} (\text{مس} \text{لا})$$

$$= \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \frac{1}{2} \text{مس}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$$

جبکہ ایک طاق عدد ہوتا ہے تو ذیل کی مثال کی طرح عمل کیا جاسکتا ہے۔
توضیحی مثال۔

$$\text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{فر} = \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{فر}$$

$$= \text{مس}^{\frac{1}{2}} (\text{لا} - \text{لا}) \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} (\text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا}) \text{فر}$$

$$= \text{مس}^{\frac{1}{2}} (\text{لا} - \text{لا}) \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} (\text{فر} \text{لا})$$

$$= \frac{2}{11} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} - \frac{2}{7} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \frac{2}{7} \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \text{ج}$$

$$= 2 \text{قط}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \left(\frac{2}{11} - \frac{2}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} \right) \text{ج}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل تکملوں کو ثابت کرو:-

$$(1) \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{فر} = \frac{1}{4} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{مس}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \text{لوک} \text{جم} \text{مس} + \text{ج}$$

$$(2) \text{مس}^{\frac{1}{2}} (\text{جم} \text{لا}) \text{فر} = \frac{1}{2} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \frac{1}{2} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \text{ج}$$

$$(3) \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{جم} \text{لا} = \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + 2 \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \frac{1}{4} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} + \text{ج}$$

$$(4) \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} \text{فر} = \text{مس}^{\frac{1}{2}} \text{لا} - \frac{1}{4} \text{جم} \text{لا} - 2 \text{جم} \text{لا} + \text{ج}$$

$$(5) \text{مس}^{\frac{1}{2}} (\text{مس}^{\frac{1}{2}} + \text{جم}^{\frac{1}{2}}) \text{فر} = \frac{1}{4} (\text{مس}^{\frac{1}{2}} - \text{جم}^{\frac{1}{2}}) + 2 \text{لوک} \text{مس} + \text{ج}$$

(۸) جب ۱، حجم ۱، فرد کی تعیین ضعفی زاویوں کے

ذریعہ سے۔

جبکہ میان ایک مثبت طاق صحیح عدد ہوتا ہے تو سب سے مختصر طریقہ صل وہ ہے جس کی توضیح صورت (۱) میں کی گئی ہے۔ جبکہ م اور ن دونوں مثبت جنت صحیح عدد ہوں تو دیا ہوا تفرقی جو مناسب مثلثی ابدالوں کے ذریعہ ایک ایسے جلد میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جس میں ضعفی زاویوں کی جیب اور جیب التمام شریک ہونگی۔ اس استعمال کے بعد اس کا متحمل عمل میں لایا جائیگا۔ بدیں عرض مندرجہ ذیل مثلثی ضابطے استعمال کیے جاتے ہیں :-

$$\text{جب } ۱ \text{ حجم } ۱ = \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۱۲$$

$$\text{جب } ۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \text{ حجم } ۱۲$$

$$\text{جم } ۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ حجم } ۱۲$$

توضیحی مثال (۱) ثابت کرو کہ

$$\text{جم لا فرلا} = \frac{۱۳}{۸} + \frac{\text{جب } ۱۲}{۴} + \frac{\text{جب } ۱۲}{۳۲} + \text{ج}$$

$$\text{حل۔ جم لا فرلا} = \text{جم} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \text{ فرلا}$$

$$= \text{جم} \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \text{ فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۲} \text{ فرلا} + \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۱۲ \text{ فرلا} + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \text{ جم } ۱۲ \text{ فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۲} + \frac{\text{جب } ۱۲}{۴} + \frac{۱۳}{۸} + \frac{\text{جب } ۱۲}{۳۲} + \text{ج}$$

$$= \frac{۱۳}{۸} + \frac{\text{جب } ۱۲}{۴} + \frac{\text{جب } ۱۲}{۳۲} + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۲) بتاؤ کہ

$$\text{ا} \text{ جب } ۸ \text{ جم } ۲ \text{ لا فلا} = \frac{۱}{۸} (۱ - \text{جب } ۸ \text{ لا}) + \text{ج}$$

$$\text{حل۔ یکتکہ} = \frac{۱}{۸} \text{ا} \text{ (جب } ۲ \text{ لا جم } ۸ \text{ لا) فلا} = \frac{۱}{۸} \text{ا} \text{ (جب } ۸ \text{ لا) فلا}$$

$$= \frac{۱}{۸} \text{ا} \text{ (} \frac{۱}{۴} - \text{جم } ۸ \text{ لا) فلا} = \frac{۱}{۸} - \frac{\text{جب } ۸ \text{ لا}}{۴} + \text{ج}$$

$$(۹) \text{ا} \text{ جب م لا جم ن لا فلا} \text{ا} \text{ جب م لا جب ن لا فلا}$$

$$\text{ا} \text{ جم م لا جم ن لا فلا کی تعیین جبکہ م } \neq \text{ن}$$

$$\text{علم مشابہت کا ضابطہ جب م لا جم ن لا} = \frac{۱}{۴} \text{جب (م+ن) لا} + \frac{۱}{۴} \text{جب (م-ن) لا}$$

استعمال کرنے سے

$$\text{ا} \text{ جب م لا جم ن لا فلا} = \frac{۱}{۴} \text{ا} \text{ جب (م+ن) لا فلا} + \frac{۱}{۴} \text{ا} \text{ جب (م-ن) لا فلا}$$

$$= - \frac{\text{جم (م+ن) لا}}{(م+ن)^2} + \frac{\text{جم (م-ن) لا}}{(م-ن)^2} + \text{ج}$$

$$\text{اسی طرح ا} \text{ جب م لا جب ن لا فلا} = \frac{۱}{۴} \text{ا} \text{ (جم (م-ن) لا - جم (م+ن) لا) فلا}$$

$$= \frac{\text{جب (م-ن) لا}}{(م-ن)^2} - \frac{\text{جب (م+ن) لا}}{(م+ن)^2} + \text{ج}$$

$$\text{اور ا} \text{ جم م لا جم ن لا فلا} = \frac{۱}{۴} \text{ا} \text{ (جم (م+ن) لا + جم (م-ن) لا) فلا}$$

$$= \frac{\text{جب (م+ن) لا}}{(م+ن)^2} + \frac{\text{جب (م-ن) لا}}{(م-ن)^2} + \text{ج}$$

مثالیں

ثابت کرو:

$$(1) \int \text{جیاط فط} = \frac{1}{11} (50 - 2 \text{جیاط} 2 + \frac{\text{جیاط}^2 2}{3} + \frac{\text{جیاط}^3 2}{4} + \frac{\text{جیاط}^4 2}{5}) + \text{ج}$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x + C$$

$$(3) \int \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) dx = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} \right) + C$$

(۴) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

$$(5) \text{ جب } 2 \text{ لا جب } 4 \text{ لا فر } 1 = \frac{\text{جب } 3}{4} - \frac{\text{جب } 11}{22}$$

$$(4) \text{ حجم ۳ لایه ۳ فرام } = \frac{\text{حجم ۳ لایه}}{۱۳} + \frac{\text{حجم ۳ لایه}}{۲} + \text{ج}$$

۴۔ - منشی ابدال کے ذریعہ ایسے جلوں کا مکمل

جن میں اے-ر یا اء± و شریک ہو۔

اکثر صورتوں میں ایسے جلوں کے مکمل کا سہل ترین طریقہ یہ ہوتا ہے کہ متغیر کو ذیل کی طرح تبدیل کر دیا جائے۔

اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ شریک ہوتو $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لکھا جائے

اگر $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ شریک ہوتو $z =$ اسی کھا جائے

اور اگر $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{3}$ شریک ہوتو $\frac{1}{2} =$ وقطی لکھا جائے

واضح ہو کہ معیاری صورتوں ۱۵ تا ۲۰ کے تکملوں میں یہ ششماشی ابدال استعمال کیے گئے تھے۔ ایسا کرنے سے علامت جذر ساقط ہو جاتی ہے۔ نیز کہ

جملہ [۱-۲] تحویل مصرعہ سے زوجمی ہو جاتا ہے

قطی

۹-۹۰

توضیحی مثال (۱) $\int \frac{\sqrt{5x-14}}{x} dx$ دریافت کرو۔

حل - فرض کرو $u = 5x - 14$ اور $du = 5 dx$ جب $u = 5x - 14$

$$\therefore \sqrt{5x-14} = \sqrt{u} \quad \text{اور} \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{5x-14}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{u}}{\frac{u+14}{5}} \cdot \frac{du}{5} = \int \frac{\sqrt{u}}{u+14} du$$

شکل ۳۹ میں ایک زاویہ قائمہ والا مثلث
کھینچا گیا ہے جس میں عمود u ہے اور وتر $u+14$



شکل ۳۹

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{u}}{u+14} du &= \int \frac{\sqrt{u}}{u} \cdot \frac{1}{1+\frac{14}{u}} du \\ &= \int \frac{\sqrt{u}}{u} \left(1 - \frac{14}{u} + \frac{196}{u^2} - \dots \right) du \end{aligned}$$

توضیحی مثال (۲) $\int \frac{dx}{x^2(3+x^2)}$ دریافت کرو۔

حل - فرض کرو $u = 3 + x^2$ اور $du = 2x dx$ $\therefore dx = \frac{du}{2x}$ اور $u = 3 + x^2$

اور $u = 3 + x^2$ اور $du = 2x dx$

$$\int \frac{dx}{x^2(3+x^2)} = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{3+x^2} \cdot \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2(3+u)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{3+u} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{u}{3(3+u)} \right) du$$

لاحظہ ہو شکل ۴۰



شکل ۴۰

توضیحی مثال (۳) $\int \frac{فرلا}{2 - \sqrt{لا}}$ دریافت کرو۔

حل - فرض کرو $2 = \sqrt{لا}$ اور $لا = لقط$

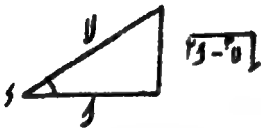
۵ فرلا = لقط، مس، فری اور $\sqrt{لا} = 2 - مس$

پس تکمید $= \int \frac{لقط و مس و فری}{لا لقط و مس و لقط} = \frac{1}{لا} \int \frac{فری}{لقط}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{لا} \int \frac{فری}{لقط} &= \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} = \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} = \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} \\ &= \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} = \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} = \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} \\ &= \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} = \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} = \frac{1}{لا} \int \frac{جم و فری}{جم و فری} \end{aligned}$$

ملاحظہ ہو شکل ۵

$$= \frac{(لا + 1) \sqrt{لا - 2}}{لا}$$



شکل ۵

مثالیں

مندرجہ ذیل تکمیلے معلوم کرو:-

$$(۱) \int \frac{فرط}{9 + ۲۴ ط + ۱۶ ط^۲} \quad [\text{جواب} = \frac{1}{۴} \text{ لوگ } \frac{۳ - ۹ + \sqrt{۳۶ - ۲۴ ط + ۱۶ ط^۲}}{۲}]$$

$$(۲) \int \frac{فری}{۳۶ - ۲۴ ل + ۱۶ ل^۲} \quad [\text{جواب} = \text{لوگ } (۳۶ - ۲۴ ل + ۱۶ ل^۲) - \frac{۳۶ - ۲۴ ل + ۱۶ ل^۲}{۱۶}]$$

ثابت کرو کہ :-

$$(۳) \int \frac{فرلا}{لا - ۴۹} = \frac{1}{۴} \text{ لوگ } (لا - ۴۹ + ۷) + ج$$

$$\begin{aligned} (۴) \int \frac{\sqrt{۴-۲۱} \sqrt{x}}{x} &= \frac{(۴-۲۱)^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{ج} \\ (۵) \int \frac{x^2 \sqrt{x}}{3+21\sqrt{x}} &= \frac{(۶-۲۱)^{\frac{1}{2}} (3+21)}{3} + \text{ج} \\ (۶) \int \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^2-21\sqrt{x}} &= \frac{2}{3} (1-21) \sqrt{x} + \text{ج} \end{aligned}$$

مکمل کے سوالات حل کرنے میں طالب علم کو اچھی مہارت صرف اس وقت حاصل ہوتی ہے جبکہ وہ سوال کو بغور دیکھ کر طبعاً پہچان لیتا ہے کہ اس کے حل کے لیے مکمل کے ضابطوں میں سے کونسا ضابطہ استعمال کرنا چاہیے۔ یہ مہارت مشق ہی سے حاصل ہو سکتی ہے۔ اس لیے ہم ذیل میں چند متفرق سوالات طالب علم کی مشق کے لیے درج کیے دیتے ہیں۔

متفرق مثالیں

ثابت کرو کہ :-

$$(۱) \int (1-x) \sqrt{x} = \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \text{ج}$$

$$(۲) \int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \text{ج}$$

$$(۳) \int \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \text{ج}$$

$$(۴) \int (1+x) \sqrt{x} = \frac{1}{2} \sqrt{x} + \frac{x}{2} + \text{ج}$$

$$(۵) \int \frac{x \sqrt{x}}{x^2+21\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{x}{2} + \text{ج}$$

$$(۶) \int (۵و) مس' قط' لا فرلا = \frac{(۵و) مس'}{۱+لوک} + ج$$

$$(۷) \int \frac{ط' لا و' و' فرط}{ط'} = - \frac{(۱و) ط'}{۱+لوک} + ج$$

$$(۸) \int \frac{جب (مس' اص) فرط}{۱+ع' } = - جم (مس' اص) + ج$$

$$(۹) \int \frac{جب' ۲ ط' جم ۱ ط' فرط}{۲} = \frac{۳}{۲} جب' ۲ ط' + ج$$

$$(۱۰) \int - مس' ۲ ط' لا فرلا = - \frac{۱}{۸} مس' ۲ + ج$$

$$(۱۱) \int (و' + و' - و') (و' - و') فرلا جبکہ ن = ۱ -$$

$$= \frac{۱}{۱+و'} (و' + و') + ج$$

$$(۱۲) \int \frac{قط' لا فرلا}{۱-مس' لا} = - ۲ (۱-مس' لا) + ج$$

$$(۱۳) \int \frac{وجبتا ط' فرط}{ط' - ۱} = وجبتا ط' + ج$$

$$(۱۴) \int \frac{و' لا}{و' + لا} فرلا = ۲ (و' + لا) + ج$$

$$(۱۵) \int \frac{جم ۲ لا فرلا}{لا جب ۲ لا} = - ۲ ق' ۲ لا + ج$$

$$(۱۶) \int \frac{فرلا}{۲ لوک ما لوک (لوک ما)} = لوک \{ لوک (لوک ما) \} + ج$$

$$(۱۷) \int \frac{جم ۳ لا فرلا}{جب ۳ لا} = - \frac{۱}{۳} ق' ۳ لا + ج$$

$$(۱۸) \int \frac{(ط' + ۱) فرط}{ط' ۲ - ۱} = \frac{۱}{۲} لوک (ط' ۲ + ۱ - ۱) + ج$$

۵۔ تکمیل بالخصوص - ایک ہی متغیر کے دو تفاعلوں کے

حاصل ضرب کے طریقہ تفرق پر غور کرنے سے ایسے حاصل ضرب کے مکمل کا ایک مفید ضابطہ دستیاب ہوتا ہے جو بکثرت استعمال ہوتا ہے اور تکمیل بالخصوص کا ضابطہ کہلاتا ہے -

چنانچہ اگر x اور y ایک واحد متغیر مقبوع کے تفاعل ہوں تو

$$\text{چونکہ } (x+y) = x+y \text{ اور } (x-y) = x-y$$

اس لیے تبدیلی ترتیب سے

$$x+y = (x+y) \text{ اور } x-y = (x-y)$$

اس کو تکمیل کرنے سے

$$(x+y) = (x+y) \text{ اور } (x-y) = (x-y) \dots (1)$$

یہ ضابطہ استعمال کرنے کے لیے ضروری ہے کہ دیے ہوئے تفسرہ کو دو اجزاء ضربی میں علیحدہ کریں یعنی x اور y - اگرچہ ان اجزائے ضربی کے انتخاب کے متعلق کوئی عام قاعدہ پیش نہیں کیا جاسکتا تاہم مندرجہ ذیل ہدایات پر عمل ضروری ہے :-

(۱) فرما، ہمیشہ x کا ایک حصہ ہونا چاہیے -

(۲) فرقہ کل فیض تکمیل کے قابل ہونا چاہیے -

(۳) جملہ جس کا مکمل مقصود ہے جب دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے تو

عموماً انسب طریقہ یہی ہے کہ سب سے زیادہ پیچیدہ شکل کے ممکن استکل جزو ضربی کو بطور حصہ فرو منتخب کیا جائے -

ذیل کی مثالوں کے مطالعہ سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ ضابطہ کس طرح استعمال کیا جاتا ہے -

توضیحی مثال (۱) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ فرما دیافت کرو -

حل۔ فرض کرو $x = لا$ اور $(لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} لا فرلا = فرو$ \therefore $فرو = لا فرلا$

تب $لا (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} فرلا = لا فرلا$ اور $لا فرلا = لا فرلا$

اور $لا (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} فرلا = لا فرلا$ اور $لا فرلا = لا فرلا$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}}$$

اور مکمل $= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$$

توضیحی مثال (۲) $لا$ سے $لا فرلا$ دریافت کرو۔

حل۔ فرض کرو $x = لا$ اور $فرو = لا فرلا$

$$\therefore فرو = لا فرلا$$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$$

$$= \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} - \frac{2}{15} (لا - ۱)^{\frac{۱}{۲}} + ج$$

بعض صورتوں میں مکمل یا بعض کا ضابطہ ایک سے زیادہ مرتبہ استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

توضیحی مثال (۳) کہ لا کوک لا فرلا دریافت کرو۔

حل - فرض کرو $ر = کوک لا$ اور $فرو = لا فرلا$

$$\therefore فرو = \frac{۲ کوک لا}{۳} \text{ فرلا اور } و = \frac{۳ لا}{۳}$$

$$\therefore ر = فرو = کوک لا \left(\frac{۲ لا}{۳} \right) - ر \left(\frac{۳ لا}{۳} \right) \left(\frac{۲ کوک لا فرلا}{۳} \right)$$

$$= \frac{۲ لا}{۳} کوک لا - \frac{۲}{۳} ر لا کوک لا فرلا$$

تکمل بالخصص کا ضابطہ کر استعمال کرنے سے کہ لا کوک لا فرلا کی تعیین ہو جاتی ہے۔ چنانچہ فرض کرو $ر = کوک لا$ اور $لا فرلا = فرو$ $\therefore فرو = \frac{۳ لا}{۳}$ اور $و = \frac{۳ لا}{۳}$

$$\text{پس } ر (کوک لا) لا فرلا = کوک لا \left(\frac{۲ لا}{۳} \right) - ر \left(\frac{۳ لا}{۳} \right) = \frac{۲ لا کوک لا}{۳} - \frac{۳ لا}{۳} ر$$

$$\therefore \text{دیا ہوا تکملہ} = \frac{۲ لا کوک لا}{۳} - \frac{۲}{۳} ر (کوک لا) + ج$$

$$= \frac{۲ لا}{۳} (کوک لا - \frac{۲}{۳} کوک لا + لا) + ج$$

توضیحی مثال (۴) کہ قظ لا کوک مس لا فرلا کی تعیین کرو۔

حل - ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ سہولت اسی میں ہے کہ فرض کیا جائے کہ

$$\text{کوک مس لا} = ر \text{ اور قظ } و فرو = فرو$$

$$\therefore فرو = \frac{\text{قظ لا فرلا}}{\text{مس لا}} \text{ اور } و = ر \text{ قظ لا فرلا} = \text{مس لا}$$

$$\text{پس دیا ہوا تکملہ} = (کوک مس لا) (مس لا) - ر (مس لا) \frac{\text{قظ لا فرلا}}{\text{مس لا}}$$

$$= \text{مس لا کوک مس لا} - ر \text{ قظ لا فرلا}$$

$$= \text{مس لا لوک مس لا} - \text{مس لا} + \text{ج}$$

$$= \text{مس لا (لوک مس لا - ۱)} + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۵) ثابت کر دو کہ

$$\text{ا} \text{ لو جب م لا فرلا} = \frac{\text{لو}^2 (\text{ا جب م لا} - \text{م جم م لا})}{\text{ا}^2 + \text{م}^2} + \text{ج}$$

حل - فرض کرو $\text{ا} = \text{لو}$ اور $\text{فر و} = \text{ا جب م لا فرلا}$

تب $\text{فر و} = \text{ا لو فرلا اور و} = - \frac{\text{جم م لا}}{\text{م}}$

$$\text{پس دیا ہوا مکملہ} = - \frac{\text{لو}^2 \text{جم م لا}}{\text{م}} + \frac{\text{ا}}{\text{م}} \text{ا لو جم م لا فرلا} \dots \dots (۱)$$

نئے مکمل کو حصص کے طریقے سے نکالنے کے لیے فرض کرو

$$\text{و} = \text{لو}^2 \text{ اور فر و} = \text{جم م لا فرلا}$$

تب $\text{فر و} = \text{ا لو فرلا اور و} = \frac{\text{جم م لا}}{\text{م}}$

$$\text{پس ا لو جم م لا فرلا} = \frac{\text{لو}^2 \text{جم م لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ا}}{\text{م}} \text{ا لو جب م لا فرلا} \dots \dots (۲)$$

(۲) کو (۱) میں تعویض کرنے سے

$$\text{ا لو جب م لا فرلا} = \frac{\text{لو}^2}{\text{م}} (\text{ا جب م لا} - \text{م جم م لا}) + \frac{\text{ا}}{\text{م}} \text{ا لو جب م لا فرلا}$$

آخری مساوات میں دونوں تکملے ایک ہی ہیں۔ پس بائیں جانب کے تکمل کو مساوات کے سیدھے جانب منتقل کر کے مساوات کو حل کرنے سے

$$\text{ا لو جب م لا فرلا} = \frac{\text{لو}^2 (\text{ا جب م لا} - \text{ا جم م لا})}{\text{ا}^2 + \text{م}^2} + \text{ج}$$

مانع ہو کہ مکمل بالحصص کے طریقے کے سب سے اہم اطلاعات حسب ذیل ہیں :-

- (ا) تفرقے جن میں حامل ضرب شریک ہیں -
 (ب) تفرقے جن میں دو کا رقم شریک ہیں -
 (ج) تفرقے جن میں مقلوب دائری تفاعل شریک ہیں -

مثالیں

مندرجہ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :-

- (۱) $\int \text{لوک لا فرلا} = \text{لا لوک (لا - ا)} + \text{ج}$
 (۲) $\int \text{لاجم لا فرلا} = \frac{1}{2} \text{لا جب لا} + \frac{1}{4} \text{جم لا} + \text{ج}$
 (۳) $\int \text{لا جب لا فرلا} = \frac{1}{2} \text{لا} - \frac{1}{4} \text{لا جب لا} - \frac{1}{4} \text{جم لا} + \text{ج}$
 (۴) $\int \text{بب لاجم لا فرلا} = \frac{1}{8} (۳ \text{بب لا جب لا} + \text{جم لاجم لا} + ۲) + \text{ج}$
 (۵) $\int \text{لا لوک لا فرلا} = \frac{\text{لا}^{۱۰۳}}{۱۰ + ۱} (\text{لوک لا} - \frac{1}{۱۰ + ۱}) + \text{ج}$
 (۶) $\int \text{بب لا فرلا} = \text{لا جب لا} + \frac{1}{۱۰ - ۱} + \text{ج}$
 (۷) $\int \text{مم لا فرط} = \frac{1}{4} \text{لوک (ا + ط)} + \text{ج}$
 (۸) $\int \text{مس لا فرط} = \frac{1}{4} \text{ط مس لا} - \frac{1}{4} \text{لوک (ط + ۹)} + \text{ج}$
 (۹) $\int \text{مس لا فرلا} = \text{لوک} \left(\frac{1}{۱۱ + ۱} \right) - \frac{1}{1} \text{مس لا} + \text{ج}$
 (۱۰) $\int \text{لوک (ا - ط)} \text{فرط} = (ط - ا) \text{لوک (ا - ط)} - \frac{1}{4} (ط + ۲ ط) + \text{ج}$
 (۱۱) $\int \text{بب لا فرلا} = \frac{\text{بب لا} + \text{جم لا}}{۲} + \text{ج}$
 (۱۲) $\int \text{قف بب لا فرظ} = \frac{\text{قف}}{۱۰} (\text{بب لا} + ۳ \text{جم لا} + ۲) + \text{ج}$

$$(۱۳) \int \frac{ط \cdot ط \cdot فرط}{ط^2(ط+۱)} = ج + \frac{ط}{ط+۱}$$

$$(۱۴) \int \frac{ط^2 \cdot فرط}{ط} = ج + \frac{ط^2 + ط + ۲}{ط}$$

$$(۱۵) \int قو^2 (جھ لا - جب لا) فرلا = ج + \frac{قو^2 (۲ جب لا - جھ لا)}{۲}$$

$$(۱۶) \int ما^2 کوک (۲ - ۱) فر ا = \frac{ما^2 - ۲ کوک}{۲} (۲ - ۱)$$

$$ج + \left(۱۹ + \frac{ما^2}{۲} + \frac{۲ کوک}{۲} \right) \frac{۱}{۲} -$$

$$(۱۷) \int (قو - قو^2) جب و ف فر ف =$$

$$ج + \frac{(قو - قو^2) جب و ف - ۱ (قو - قو^2) جھ و ف}{۱ + ۲}$$

بارہواں باب

تکمل کا مستقل اور محدود تکمل

۱۔ ابتدائی شرائط کے ذریعہ تکمل کے مستقل کی

تعیین — جیسا کہ سابقہ باب کے آغاز میں بتایا گیا ہے کسی دی ہوئی مثال

میں تکمل کا مستقل دریافت کر لیا جاسکتا ہے جبکہ ہمیں متغیر کی کسی قیمت کے لیے تکمل کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ بالفاظ دیگر کسی نامحدود تکملہ کا مستقل دریافت کر لیا جاسکتا ہے جبکہ یہ معلوم ہو کہ حاصل شدہ تفاعل کسی معین شرط کو پورا کرتا ہے مثلاً

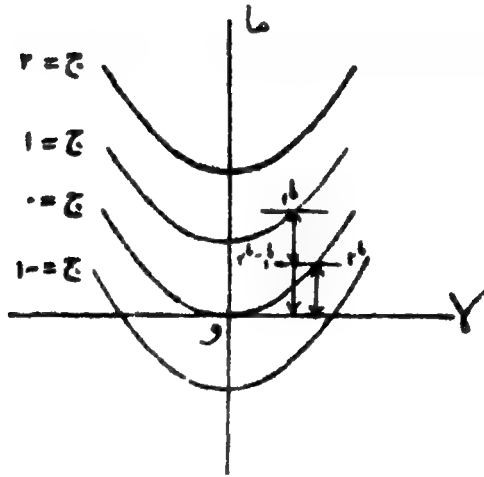
تکمل ف (لا) = ا ف (لا) فرلا + ج ایک نامحدود تکمل ہے

جس میں مستقل ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہمیں یہ جاننا ضروری ہے کہ متغیر لا کی کسی خاص قیمت کے لیے تفاعل ف (لا) یعنی تکمل کی کیا قیمت ہے۔

توضیحی مثال (۱) ا لا فرلا کے تکمل میں ج کی قیمت دریافت کرو یہ معلوم رکھو کہ تکمل = م جبکہ لا = ۲

چونکہ م = ف (لا) = ا لا فرلا = $\frac{۲}{۲}$ + ج

اور $۲ = ۴$ جبکہ $۲ = ۲$ پس $\frac{۲}{۲} + ج = ۲ \therefore ج = ۲$
 تفاعل کے مستقل کی ہندی ترجائی بھی آسان ہے۔ چنانچہ اس توضیحی مثال کی
 ترسیم یعنی شکل ۵۲ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ تکمل کو من مانے قیمت
 دی جا سکتی ہے اگر ہم $۲ = ۰$ صفر فرض کر کے ج کو تکمل کی قیمت عطا کریں۔



شکل ۵۲

واضح ہے کہ مساوات بالا میں ج کی ہر معین قیمت کے لیے ایک معین ترسیم
 موجود ہے۔ اگر ہم اس نظام کے کوئی دو معنی منتخب کریں مثلاً

$$۲ = \frac{۲}{۲} + ج \quad \text{اور} \quad ۱ = \frac{۱}{۲} + ج$$

ان کے معینوں (ordinates) کا تفاوت $۲ - ۱ = ۱$ ج - ج غیر تابع ہے
 لا کا۔

توضیحی مثال (۲) ایسے معنی کی مساوات دریافت کرو کہ معنی کے کسی نقطہ پر
 خط مماس کا ڈھلان تبدیلی علامت کے ساتھ فضلہ اور معین کی نسبت کے مساوی ہے۔
 حل۔ اس سوال کی ترجائی مساوات ذیل سے ہوتی ہے $\frac{۲}{۲} = - \frac{۱}{۲}$

متغیروں کو جدا کرنے سے ما فرما = - لا فلا

$$\text{اور عمل تکمل سے } \frac{1}{4} = - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ ج}$$

واضح ہے کہ یہ ایک ہم مرکز دائروں کے نظام کی مساوات ہے جن کے مرکز مباد پر ہیں۔ یہ ایک نامحدود تکمل کی مثال ہے۔ تحدید کے لیے اگر یہ شرط لگا دی جائے کہ معنی نقطہ (۲، ۵) میں سے گزرے تو

$$۱۶ + ۲۵ = ۴۱ = \text{ج} ۲ = \text{ج} ۱ \text{ جو خاص معنی مقصود ہے۔}$$

$$\text{دائرہ لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۴۱ \text{ ہے}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل سوالات میں تکمل کا مستقل دریافت کرو جبکہ متغیر کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے تکمل کی قیمت بتا دی جاتی ہے اور پھر اس کی مدد سے تکمل کی پوری قیمت حاصل کرو:-

$$(۱) \int \frac{-لا فلا}{100-لا} \text{ جبکہ لا} = ۶ \text{ تو تکمل} = ۸ \text{ [جواب مستقل = تکملہ کی پوری قیمت = ما}^۲ - ۱۰۰ لا^۲]$$

$$(۲) \int \frac{فلا}{لا - ۱} \text{ جبکہ لا} = ۱ \text{ تو تکمل} = \frac{۳۵}{4} \text{ [جواب مستقل = تکملہ کی پوری قیمت = بتاؤ ۳۲۰}]$$

$$(۳) \int \text{مس طہ فرطہ جبکہ} = ۰ \text{ تو تکمل} = ۳ \text{ [جواب مستقل = تکملہ کی پوری قیمت = لوگ قطبہ ۳۲۰}]$$

منحنیوں کے نظام کی مساوات حاصل کرو جبکہ ان کے کسی نقطہ پر کے خط مماس کا ڈھلان حسب ذیل ہے:-

$$(۴) \frac{1}{4} \text{ [جواب نیم کمی خطوط مکانی } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ ج}]$$

$$(۵) \frac{1}{4} \text{ [جواب خطوط زائد با لا}^۲ - لا^۲ + ج]$$

$$(۶) \frac{ب-ا}{ا} = ج \quad [جواب۔ خطوط ناقص بے لا + لا' ا' = ج]$$

$$(۷) \frac{ا+ب}{ا} = ج \quad [جواب۔ دوائر لا + لا' + لا' = ج]$$

(۸) ثابت کرو کہ منحنی جس کا زیر تماس مستقل اور لا کے مساوی ہے

$$لا + ج = لا$$

(۹) ثابت کرو کہ منحنیاں جن کے کسی نقطہ پر کے مستقیم قطر اور خط تماس کے مابین زاویہ زاویہ مستقیم کا ان گنا ہے $لا = ج$ جب ن طہ ہیں۔

۲۔ تکمل کے مستقل کی طبیعیات کے مسائل

کے ذریعہ ترجیحی۔

ذیل میں ہم دو مشہور میکانی مثالیں دے کر تکمل کے مستقل کا مفہم بتائیں گے۔

(۱) خط مستقیم میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والے ذرہ کے کلیات حرکت اخذ کرو۔

حل۔ چونکہ اسراع $= \frac{فر}{و} =$ مستقل جس میں $ر =$ رفتار اور

$$و = \text{وقت} \quad \text{اس لیے } فر = لا = \text{لکھ}$$

تب $فر = لا$ فرو اور تکمل کرنے سے $ر = لا + و + ج \dots (۱)$

ج کی تعیین کے لیے فرض کرو کہ ذرہ کی ابتدائی رفتار $ر$ ہے یعنی $ر = ر$ جبکہ $و = ۰$ $\therefore ر = ۰ + ج$ یعنی $ج = ر$

پس مساوات (۱) ہو جاتی ہے $ر = لا + و + ر \dots (۲)$

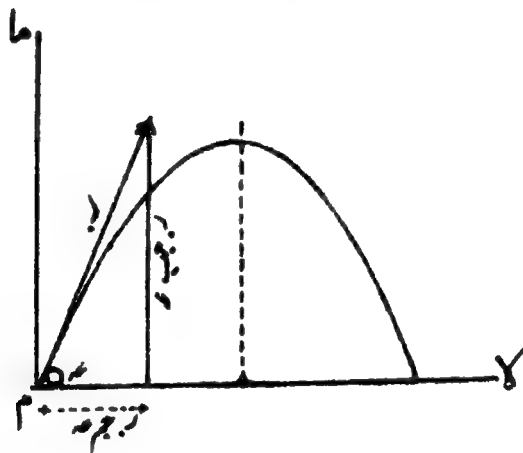
$$\text{چونکہ } ر = \frac{فر}{و} \text{ جس میں } س = \text{فاصلہ اور } و = \text{وقت}$$

پس مساوات (۲) سے $\frac{1}{\text{وزو}} = \text{وزو} + \text{بروزو} = \text{وزو} + \text{بروزو}$

مکمل کرنے سے $\frac{1}{\text{وزو}} = \text{وزو} + \text{بروزو} + \text{ج}$ (۳)
ج کی تعیین کے لیے فرض کرو کہ ابتدائی فاصلہ س ہے یعنی $\text{س} = \text{س}$ جبکہ $\text{وزو} = 0$
تب (۳) میں عمل ابدال سے $\text{س} = 0 + 0 + \text{ج} \therefore \text{ج} = \text{س}$

اور اس لیے $\frac{1}{\text{وزو}} = \text{وزو} + \text{بروزو} + \text{س}$ (۴)

(۲) مری کی حرکت پر بحث کرو جس کی ابتدائی رفتار برافقی سطح سے
زاویہ θ پر مائل ہے صرف جاذبہ زمین کا عمل فرض کیا جائے۔
حل - فرض کرو کہ کام ما (شکل ۵۳) حرکت کا مستوی ہے۔



شکل ۵۳

م لا افقی اور م ما انتصابی خط ہے اور مری مبداء م سے پھینکا جاتا ہے۔ چونکہ صرف جاذبہ زمین کا عمل مانا گیا ہے اس لیے افقی سمت میں اسراع صفر ہے اور انتصابی سمت میں - ج

$$\text{پس } \frac{\text{فرس}}{\text{وزو}} = 0 \text{ اور } \frac{\text{فرسما}}{\text{وزو}} = -\text{ج}$$

عمل تکمیل سے $R = H$ اور $L = -J + W$ (نوٹ - چونکہ باؤب زمین کے لیے ملاوت ج نکھی گئی ہے اس لیے مستقل کے لیے ملاوت مراختیار کی گئی)

لیکن رجم = ابتدائی رفتار افقی سمت میں اور رجب = ابتدائی رفتار
انتخابی سمت میں

لہذا م = رجم = اور م = رجب =

∴ $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n}$ (1)

$$\frac{\text{فربلا}}{\text{فربو}} = \frac{\text{فربلا}}{\text{فربو}} \text{ اور } \frac{\text{فربلا}}{\text{فربو}} = \frac{\text{فربلا}}{\text{فربو}}$$
$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{رجم ع اور فرلا} = \text{ج و} + \text{رجب ع}$$

یعنی فرلا = رجم + فرو اور فرما = ج و فرو + رجب + فرو

تکمل کرنے سے $\Delta = \text{برجم ع. و. و.} + \text{ح. پ.}$ اور

۶ = ۱/۴ ج و + رجب ۰ و + مہ ۰۰۰ (۲)

ہم اور ہم کی تعیین کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ جب $\omega = 0$ ، تو $\lambda = 0$ اور $\mu = 0$ ۔
پس عمل ابدال سے $\mu = 0$ اور $\lambda = 0$ ۔

∴ لا = بجمعه و اور ما = پچ و رجب ع. و... (۳) اور (۴)
آضال ذکر مساواتوں میں و کو ساقل کرنے سے

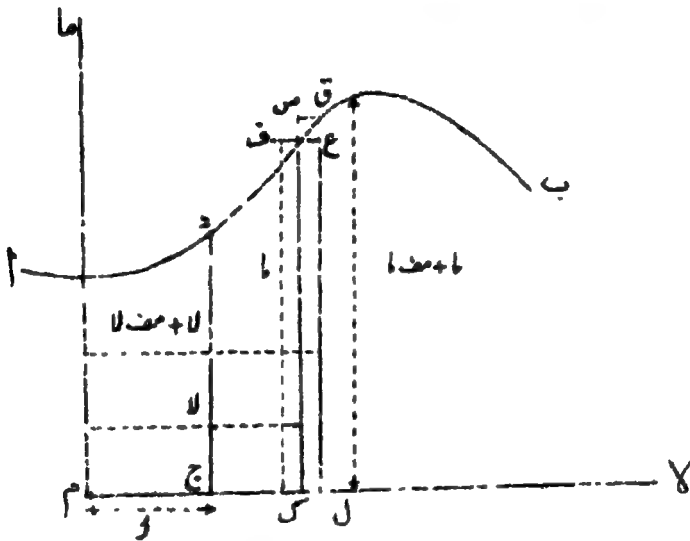
$$b = \text{لامس} - \frac{c \text{ لا}}{a \text{ لا حرمه}} \quad (d)$$

جو مراۃ کی مساوات ہے اور جس سے ظاہر ہے کہ مری خط مکانی میں حرکت کرتا ہے۔

محدود مکمل

۳۔ منحنی کے نیچے کے رقبہ کا تفرقہ -

مسلسل تفاعل فہ (لا) پر غور کرو اور فرض کرو کہ ما = فہ (لا) منحنی اب کی مسادات ہے جس کی ترسیم شکل ۵۴ میں بتائی گئی ہے -



شکل ۵۴

ج د ثابت معین ہے اور ک ف متغیر معین ہے۔ منحنی کرو د رقبہ ج ک ف د کی پیمائش ہے۔ لا کی قیمت میں ایک چھوٹا اضافہ مع لا واقع ہوتا ہے اور شکل میں رقبہ ک ل ق ف اس کو تغیر کرتا ہے۔ اگر مستطیل ک ل ع ف اور ک ل ق ف میں مکمل کیے جانے چاہیں تو واضح ہے کہ

$$\text{رقبہ ک ل ع ف} > \text{رقبہ ک ل ق ف} > \text{رقبہ ک ل ق س}$$

یعنی (ک ف) مفل لا > مفل > (ل ق) مفل لا

مفل لا پر تقسیم کرنے سے ک ف > مفل لا > ل ق

[نوٹ - اگر شکل ایسی ہو کہ ک ف زائد ہوں ق سے تو اوپر کی سطر میں بجائے
ت کے علامت < لکھنا ہوگا] -

مفل لا کو صفر تک بطور انتہا پہنچے دو۔ چونکہ ک ن ثابت ہے اور ل ق
انتہا ک ف کو پہنچ جاتا ہے (اس لیے کہ ما متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہے)

یے $\frac{فر}{لا} = م (= ک ف)$ یا تفرقوں کی زبان میں $فر = م \times لا$

کسی مضنی 'محور لا' ایک ثابت معین اور ایک متغیر
ن سے گھبرے ہوئے رقبہ کا تفرقہ مساوی ہے
بل ضرب متغیر معین اور متناظر مقطوعہ کے تفرقہ کے۔

۷۔ محدود تکملہ - سابقہ فصل کی آخری تحریر سے

بطور ہوتا ہے کہ اگر منحنی ۱ ب (شکل ۷۷) م = ف (لا) ہے تو
 $فر = م \times لا$

بنے $فر = ف (لا) \times لا$ (۱)

میں فر منحنی 'محور لا اور دو معینوں کے درمیان فی رقبہ کا تفرقہ ہے۔

کرنے سے $م = ک ف (لا) \times لا$ حاصل ہوتا ہے۔

ک ف (لا) فر لا کو ف (لا) + ج سے تعبیر کرو۔

۸۔ $م = ف (لا) + ج$ (۲)

اس طرح تعین کی جاتی ہے کہ م = صفر جبکہ لا = ۱

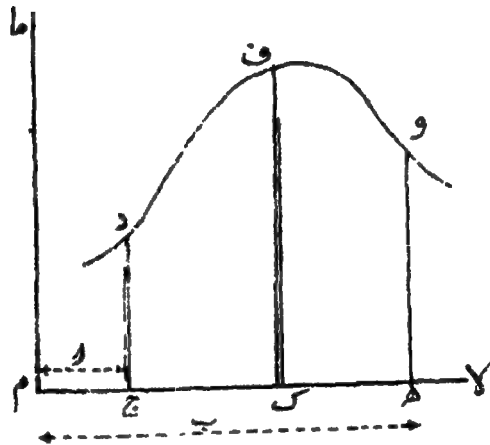
نامیتموں کو نتیجہ (۲) میں تعویض کرنے سے

$$(۱) = ۰ \quad \text{ف} + (۱) = ج \quad \therefore ج - = ف (۱)$$

س لیے (۲) ہو جاتا ہے ، $ف (لا) - ف (۱) \dots\dots (۳)$

در مطلوبہ رقبہ ج و د (شکل ۵۵) کی قیمت ہے (۳) میں جبکہ لا = ب

پس رقبہ ج و د = ف (ب) - ف (۱) \dots\dots (۱)



شکل ۵۵

مسئلہ - ۴ ما فرلا کی قیمتوں کا تفاوت جبکہ لا = ۱

ہر لا = ب اس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو معائن ما و ا لے
فنی 'محور لا اور لا = ۱ اور لا = ب کے متناظر معینوں
نے درمیان واقع ہے۔

تفاوت علامت $\frac{1}{2}$ ما فرلا یا $\frac{1}{2}$ ف (لا) فرلا کے ذریعہ ظاہر

کیا جاتا ہے اس طریق کتابت کا موجد فرانس کا مشہور ماہر ریاضی جوزف فورٹے (Joseph Fourier) ہے۔ اور پڑھا جاتا ہے ”ما فرلا“ کا تکرار اسے ب تک اس عمل کو ”حدود کے ما بین تکمیل کرنا“ کہتے ہیں۔ اور کو حد زیریں اور ب کو حد بالا کہتے ہیں۔

چونکہ (۳) کی ہمیشہ ایک محدود قیمت ہوتی ہے اس لیے وہ محدود تکرار کہلاتا ہے۔

کیونکہ اگر $f(x) = f(a) + (x-a) \phi(x)$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx = \int_a^b \phi(x) dx$$

یعنی $f(b) - f(a) = \int_a^b \phi(x) dx$

جس میں سے عمل تکمیل کا مستقل مفہوم ہو گیا۔

پس ہم علامت $f(x)$ (لا) فرلا یا $f(x)$ (لا) فر (لا) کی یوں تعریف کر سکتے ہیں کہ

وہ عددی پیمائش ہے اس (قبہ) کی جو گھیرا ہوا ہے منحنی $y = f(x)$ محور x اور $x = a$ اور $x = b$ پر کے منحنی کے معینوں سے۔ یہ تعریف پہلے ہی سے فرض کر لیتی ہے کہ یہ خطوط ایک (قبہ) کو گھیر لیتے ہیں۔ یعنی منحنی (لا) تنہا ہی تک نہ تو اوپر کی طرف جاتا ہے اور نہ نیچے کی طرف اور a اور b دونوں محدود ہیں۔

واضح رہے کہ $f(x)$ (لا) پورے وقفہ $[a, b]$ میں مسلسل اور وحید القیئت ہے۔

محدود تکمیل کی قیمت کی تعیین کا قاعدہ۔

پہلے دیے ہوئے تفرقی جملہ کا غیر محدود تکمل حاصل کیا جائے پھر اس میں اولاً بالائی حد درج کی جائے اور بعد کو زیرین حد درج کی جائے۔ اس کے بعد آخر الذکر کو اول الذکر میں سے تفریق کیا جائے۔

توضیحی مثال (۱) $\int_0^2 (3-x)^2 dx$ فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{حل} - \int_0^2 (3-x)^2 dx = \int_0^2 \left[\frac{(3-x)^3}{3} \right] - =$$

$$= \left[\frac{(3-0)^3}{3} - \frac{(3-2)^3}{3} \right] = 20$$

توضیحی مثال (۲) $\int_0^2 \frac{dx}{25-x^2}$ فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

حل - یہ سوال معیاری صورت (۱۶) اور (۱۷) کے مشابہ ہے۔

پس $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5 \times 2} \int_0^2 \frac{1}{\frac{5-x}{5+x}} dx$ یا $-\frac{1}{30} \int_0^2 \frac{1}{\frac{5-x}{5+x}} dx$ کو پہلے طریقہ پر عمل کرنے سے منفی عدد کا لوکار تم ملتا ہے اس لیے دوسرا طریقہ اختیار کیا جانا چاہیے۔

پس تکمل $-\frac{1}{30} \left[\frac{5-x}{5+x} \right]_0^2 = -\frac{1}{30} \left(\frac{3}{7} - \frac{5}{5} \right) = \frac{2-5}{3+5}$ کو

۵۔ متغیر کی تبدیلی کے متناظر حدود تکمل کی

تبدیلی — جب کسی نئے متغیر کی مدد سے تکمل عمل میں لایا جاتا ہے تو بعض اوقات ابتدائی متغیر کی رقتوں میں نتیجہ کو ظاہر کرنے میں دقت پیش آتی ہے۔ جینہ حدود کے مابین جب تکمل کرنا ہوتا ہے تو ہم ابتدائی متغیر کے استعمال سے

بچ سکتے ہیں اگر ان معینہ حدود کو نئے متغیر کی رقوموں میں پیش کر دیں۔ چند ایک مثالوں کے مطالعہ سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ کس طرح کیا جاسکتا ہے۔

توضیحی مثال (۱) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ - لا فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ لا = $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ جب نہ لکھو تب فرلا = $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ اور جبکہ لا بدلتا ہے صفر سے ۱ تک تو نہ بدلتا ہے صفر سے $\frac{\pi}{4}$ تک پس

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

توضیحی مثال (۲) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ لا = $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ و لکھو تب $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ اور فرو = $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

مجہذا جبکہ $2 = 1$ اور جبکہ $1 = 2$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

[نوٹ۔ واضح ہو کہ سابقہ اور جدید متغیر میں تعلق اس طرح کا ہونا چاہیے کہ حدود کھل کے اندر ایک متغیر کی ہر ایک قیمت کے متناظر دوسرے متغیر کی ہمیشہ ایک اور صرف ایک محدود قیمت ہو۔ جبکہ ایک متغیر دوسرے متغیر کا کثیر القیمت تفاعل دیا جاتا ہے تو احتیاط کی جانی چاہیے کہ صحیح و موزوں قیمتیں ہی منتخب کی جائیں۔]

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ $\int f'(x) dx = f(x) + C$ - $\int f'(x) dx = f(x) + C$ فرلا
مندرجہ ذیل کی تصدیق کرو۔

$$(۲) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{فرلا}$$

$$(۳) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{فرلا}$$

$$(۴) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{فرلا}$$

$$(۵) \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{فرلا}$$

۵۔ رقبوں کی حسابی تعیین - قبل ازیں (۵) کے

آغاز میں) بتا دیا گیا ہے کہ ایک منحنی 'محمول' اور معینوں $u = x$ اور $v = y$ کے مابین کا رقبہ مضابطہ

$$\text{رقبہ} = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{فرلا}$$

ے مشتق ہوتا ہے جس میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات کی مدد سے u کی قیمت v کی رقبوں میں تعویض کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال (۱) دائرہ $u^2 + v^2 = 1$ 'محمول' اور معینوں $u = x$ اور $v = y$

اور $v = y$ کے گھیرے ہوئے رقبہ کی تعیین کرو۔

$$\text{حل} - \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \text{فرلا}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{11}{4} + \frac{3}{4} \text{ جب } \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \text{ جب } \left(-\frac{2}{4}\right)$$

$$= 18 + 853 + (12 \cdot 56) = 18 + 8565 + (12 \cdot 98) = 18 + 1759 = 3056 = 5655$$

$$= 18 + 1759 = 3056 = 5655$$

واضح ہے کہ یہ چھوٹا ہے نصف دائرہ کے رقبہ (متناظر لا = ۱۶ اور لا = ۶) سے

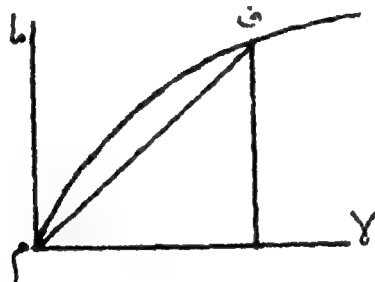
$$\text{یعنی } \frac{1}{4} (36) = 9 = 5655$$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ خط مکانی ما = لا اور خط مستقیم ما = لا سے

گھیرا ہوا رقبہ = $\frac{1}{4} \pi$

حل - منحنی محور لا اور معین ما سے گھیرا ہوا (دیکھو شکل ۵۶)

$$\text{رقبہ} = \int \text{ما فرلا اور چونکہ ما}^2 = 2 \cdot \text{لا} \therefore 2 \cdot \text{لا} = \text{ما}^2 \text{ (لا)}^{\frac{1}{2}}$$



شکل ۵۶

ہم یہاں صرف مثبت علامت لینگے

$$\text{اس لیے رقبہ} = \int \text{ما}^2 \text{ فرلا} = 2 \int \text{لا}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} \text{لا}^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \text{لا}^{\frac{3}{2}}$$

خط مستقیم ما = لا محور لا اور معین ما سے گھیرے ہوئے مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2} \text{لا} \cdot \text{لا}$

$$\text{لیکن چونکہ لا} = \text{ما} \therefore \text{مثلث کا رقبہ} = \frac{1}{2} \text{لا}^2$$

پس مکانی اور خط مستقیم کا درمیانی رقبہ = $\left(\frac{4}{3} \text{لا}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \text{لا}^2\right)$

مکانی اور خط مستقیم کے نقاط تقاطع $م^۱ = م$ لا اور $ما = لا$ ہمراہ مساواتوں کے حل سے دریافت ہو جاتے ہیں۔ یعنی $لا^۱ = م$ لا یا $لا (لا - م) = ۰$ ۔
یعنی $لا = ۰$ یا $لا = م$ سے
پس تکملہ کے حدود $لا = ۰$ اور $لا = م$ لیے جانے چاہئیں۔

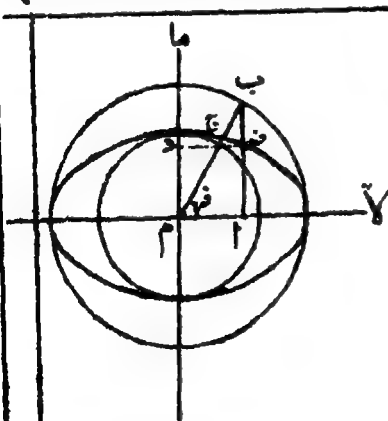
$$\therefore \left[\frac{۲}{۳} لا^۲ - \frac{۱}{۴} لا^۴ \right] = \left[\frac{۲}{۳} \times ۸ - \frac{۱}{۴} \times (۱۶ \times ۴) \right] = ۰ \quad \text{جواب}$$

۶۔ رقبہ کی تعیین جبکہ منحنیوں کی مساواتیں مبتدی شکل میں دی گئی ہوں۔

فرض کرو کہ منحنی کی مبتدی مساواتیں $لا = ف (و)$ اور $ما = فہ (و)$ ہیں
تب $ما = فہ (و)$ اور $فر لا = فہ (و)$ فرو

پس رقبہ $= \int_0^M ما فر لا = \int_0^M فہ (و) فہ (و) فرو \dots (۱)$

جس میں $و = ۰$ جبکہ $لا = ۰$ اور $و = م$ جبکہ $لا = م$
[نوٹ: اس توالی کے باضابطہ ثبوت کے لیے احصاء کی اس سے ارفع کتاب کا مطالعہ کیا جائے۔]



شکل ۶

توضیح مثال۔ خط ناقص کا رقبہ دریافت کرو جس کی مبتدی مساواتیں ہیں۔

$لا = ل$ حجم $فہ$ اور $ما = ب$ جب $فہ$
حل۔ جبکہ $لا = ل$ حجم $فہ$ $فر لا = ل$ ۔ جب $فہ$ $فہ$
جبکہ $لا = ۰$ $فہ = \frac{۲}{۳}$ اور جبکہ $لا = ل$ $فہ = ۰$ ۔
ان کو مساوات (۱) میں تواریض کرنے سے ناقص کے

پہلے رقبہ کا رقبہ $= \int_0^M ما فر لا$

$$= \int_0^M ل ب فہ فر فہ = \frac{۲}{۳} ل ب$$

∴ پورے ناقص کا رقبہ = π اب

مثالیں

دیے ہوئے مغنی، محور لا اور دیے ہوئے معینوں سے گھیرے ہوئے
مندرجہ ذیل رقبوں کی تعیین کرو:—

(۱) $1 = لا + لا + \frac{\pi}{4}$ ، $لا = 2$ ، $لا = 4$ [جواب = ۷]

(۲) $1 = لا + لا + \frac{\pi}{4}$ ، $لا = 2$ ، $لا = 2$ [جواب ۱۶۲]

(۳) ثابت کرو کہ خط مکافی کے کسی قطاع کا رقبہ جو مکافی کے محور کے
علی القوائم وتر سے کٹ کر بنتا ہے، پیرامونی مستطیل کا دو تہائی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ مکافیوں $ما = 8$ لا اور $لا = 8$ ما سے گھیرا ہوا

رقبہ $\frac{6\pi}{3}$ ہے۔

(۵) مکافی $ما = 6 + لا - لا$ سے نقاط $(-1، 4)$ اور $(3، -)$ کو

ملانے والا وتر جو قطاع تیار کرتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو [جواب = $\frac{10\pi}{3}$]

(۶) مغنی $ما = لا + لا$ اور خط مستقیم $ما = لا$ کا درمیانی رقبہ

معلوم کرو۔ [جواب = $\frac{2\pi}{3}$ - ٹوک ۲]

(۷) ثابت کرو کہ مغنی $ما = مس \frac{\pi}{4}$ ، محور لا اور خط لا = 1

محدود رقبہ $\frac{2\pi}{3}$ ٹوک ۲

(۸) بتاؤ کہ غلط تدویر (Cycloid) $لا = 4$ (طہ - جب طہ)

$ما = 4$ (جم طہ) کی ایک کمان اور محور لا کا درمیانی رقبہ $ما = 3$ ٹوک ۳ ہے۔

(۹) بتاؤ کہ خط صنوبری لا = ۱ (۲ جم و ۲ و) = ما = ۱ (۲ جب و ۲ جب و) کا رقبہ = $\frac{1}{2} \pi$
 (۱۰) ثابت کرو کہ درتدویر (hypocycloid) لا = ۱ (۲ جم و ۲ ط) = ما = ۱ (۲ جب و ۲ ط) (جس میں ط مبدل ہے) کا رقبہ $\frac{1}{2} \pi$ یعنی پیرامونی دائرہ کے رقبہ کا $\frac{3}{8}$ ہے۔

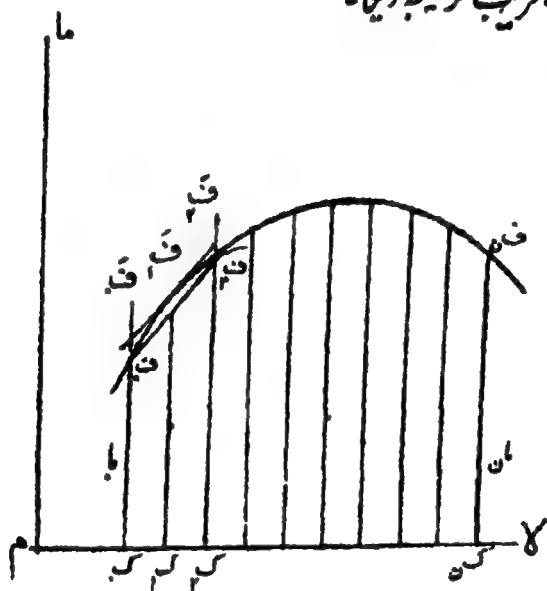
[نوٹ - جس طرح لا، ما کو کسی منحنی کے محدودان کر ما فرلا کا مقررہ حدود میں تکملہ محسوب کرنے سے رقبہ دریافت ہوتا ہے اسی طرح اگر لا، ما کسی متحرک ذرہ سے متعلق وقت اور متناسط رفتار کو تعبیر کرتے ہیں تو لا کے معینہ حدود میں ما فرلا محسوب کرنے سے محدود تکملہ ذرہ کا طے کیا ہوا فاصلہ ظاہر کرے گا۔ یعنی اسی صورت میں رقبہ طے شدہ فاصلہ کی ہندسی تعبیر کرتا ہے۔ پس واضح ہے کہ مناسب قرار دادوں کے لحاظ سے حجم، سطح، کمیت، قوت، توانائی وغیرہ کے محدود تکملوں کی بھی ہندسی طریقہ پر رقبہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ آگے چل کر ان کی متعدد مثالیں پیش کی جائیں گی۔]

۷۔ تقریبی تکمل - منحرف نما شکل کا

قاعدہ (Trapezoidal rule)

اب ہم $f(x)$ (لا) فرلا کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے دو قاعدے پیش کریں گے۔ یہ ان صورتوں میں کارآمد ہوتے ہیں جبکہ مندرجہ بالا تکمل ابتدائی متغایوں کی رقبوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے۔
 واضح ہے کہ $f(x)$ (لا) فرلا کی کا ملا صحیح عددی قیمت، منحنی ما = $f(x)$ (لا) محور لا = ۱ (۲ لا = ۱) = ب معینوں سے گھیرے ہوئے رقبہ کی پیمائش ہے۔ یہ رقبہ تقریبی طریقہ پر عنصری منحرف نماؤں کے جوڑنے سے دریافت ہو سکتا ہے جیسا کہ ذیل کے بیان سے معلوم ہوگا۔ محور م لا کے قطع ب - ۱ کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کر، ہر حصہ = $\frac{1}{n}$ (نقاط تقسیم

اگر متواتر معینوں کا اور باغیرہ کے سروں کو ورتوں کے ذریعہ ملائے کے عوض متصل کے تین تین معینوں کے سروں میں سے مناسب خطوط مکانی کھینچیں۔ (دیکھو شکل ۵۹) تو چونکہ انتصابی محور والا خط مکانی کسی بھی منحنی کے تین نقطوں میں سے گزرا جا سکتا ہے اور ایسی قوسوں کا سلسلہ دیے ہوئے منحنی کے ساتھ بہ نسبت ورتوں کے شکستہ خط کے زیادہ منطبق ہوتا ہے اس لیے یہ طریقہ رقبہ کی صحیح قیمت کے قریب تر نتیجہ دے گا۔



شکل ۵۹

شکل ۵۹ میں محور کا پلا = ۱ م ک ب سے لے کر لا = ب = م ک ب تک کے وقفہ کو ۸ جفت مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ہر حصہ = $\frac{1}{8}$ حصہ ہے ہر تین لقطوں ف' ف' ف' ف' ف' ف' ف' ف' وغیرہ کے متواتر جٹ میں سے اتصالی محروا لے خطوط مکانی کھینچے گئے ہیں۔

چنانچہ مکانی کلرے ک ب ف ف ف ف ک کا رقبہ

لا	لا	حل۔ پہلے فرض کرو $n = ۴$
۰	۲۵۰۰۰	پس مف لا = ۰.۵۵ اور چونکہ $لا + لا = لا$
۰.۵۵	۲۶۰۳۱	اس کی مدد سے لا کی قیمتوں کی ایک جدول
۱.۱۰	۲۶۲۳۶	کر لیتے ہیں چنانچہ تقریبی ضابطہ (ح)
۱.۵۵	۲۶۴۱۶	
۲.۱۰	۲۶۶۹۳	استعمال کرنے سے

$$\text{تکملہ} = ۰.۵۵ \times (۱۵۶۳۲ + ۲۶۰۱۶ + ۲۶۲۳۶ + ۲۶۰۳۱ + ۱۵۰۰۰) =$$

$$۴۵۸۵۸ = \text{جواب}$$

اگر $n = ۱۰$ لیا جائے تو اسی قاعدے سے جواب ۴۵۸۲۶ آتا ہے جو صحیح جواب سے قریب تر ہے۔

اسی نگلہ کو تقریبی ضابطہ (س) استعمال کر کے اور $n = ۴$ ہی لے کر دریافت کریں تو

$$\text{جواب برآمد ہوگا} = \frac{۱.۵}{۳} \times (۳۵۴۶۲ + ۱۰۶۸۹۴ + ۴۵۴۶۲ + ۸۵۱۲۲ + ۲۵۰۰۰) =$$

$$۴۵۸۲۱ = \text{جواب ضابطہ (ح) میں } n = ۱۰ \text{ لے کر عمل کرنے کے قریب قریب}$$

مثالیں

مہمپسن کے قاعدہ کے ذریعہ مندرجہ ذیل تکملوں کی تقریری قیمتیں دریافت کرو۔ n کی مصرعہ قیمتیں استعمال کی جائیں۔

$$(۱) \int_0^4 \sqrt{۱۰ + لا} \, لا \, فرلا \quad n = ۴ \quad \text{[جواب} = ۹۵۸۲]$$

$$(۲) \int_0^4 \sqrt{۱۰۰ - لا} \, لا \, فرلا \quad n = ۴ \quad \text{[جواب} = ۳۶۱۳۹]$$

$$(۳) \int_0^4 \sqrt{۹ + لا} \, لا \, فرلا \quad n = ۴ \quad \text{[جواب} = ۶۵۸۹]$$

(۴) $\overline{\text{ک ف (لا) فرلا}} - \text{ن} = ۶$ [جواب = ۱۸۵۱۰]

۸۔ محدود تکرار کے حدود کا باہمی تبادلہ
متبادل ہے محدود تکرار کی تبدیلی علامت کے۔

چونکہ $\text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ن (ب) - ف (ا)}$

اور $\text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ف (ا) - ن (ب)}$

پس $\text{ک ف (لا) فرلا} = - \text{ک ف (لا) فرلا}$

۹۔ محدود تکرار کے وقفہ تکمیل کی تحلیل۔

چونکہ $\text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ن (لا) - ف (ا)}$

اور $\text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ف (ب) - ن (لا)}$

اس لیے دونوں کو جمع کرنے سے $\text{ک ف (لا) فرلا} + \text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ف (ب) - ف (ا)}$

لیکن $\text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ن (ب) - ف (ا)}$

پس آخری دو جملوں کے مقابلہ سے واضح رہے کہ

$\text{ک ف (لا) فرلا} = \text{ک ف (لا) فرلا} + \text{ک ف (لا) فرلا}$

اس سلسلہ کی ہندی ترجمانی بھی آسانی ہو سکتی ہے۔ بطور مشق یہ کلام طالب علم

کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ یہ بھی واضح ہے کہ محدود تکمیل کی حسب طریقہ بالا نہ صرف دو بلکہ متعدد جدا گانہ محدود تکملوں میں تحلیل ہو سکتی ہے۔

۹۔ ایک محدود تکمیل اس کے حدود کا

تفاعل ہے۔ اس لیے کہ

اگر $f(x)$ (لا) فرلا = $f(x)$ (ب) ف (ا) اسی طرح اگر $f(x)$ (ی) فری = $f(x)$ (ب) ف (ا)

اور اگر $f(x)$ (لا) فرلا کی بعینہ وہی قیمت ہے جو $f(x)$ (ی) فری وغیرہ کی

۱۰۔ نامتناہی حدود۔ اب تک فرض کیا گیا

تھا کہ تکمیل کے حدود محدود ہیں۔ معمولی کاموں میں بھی بعض اوقات اس شرط کے رفع کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ خاص خاص صورتوں میں مندرجہ ذیل تعریفات کی مدد سے یہ شرط رفع ہو سکتی ہے۔

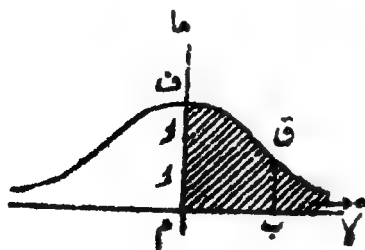
تعریفات:-

جب بالائی حد نامتناہی ہے تو $f(x)$ (لا) فرلا = $f(x)$ (ب) ف (ا) فرلا

اور جب زیرین حد نامتناہی ہے تو $f(x)$ (لا) فرلا = $f(x)$ (ب) ف (ا) فرلا

بشرطیکہ ایسی انتہائیں موجود ہیں۔

توضیحی مثال (۱۱) گنیسی کی ڈاں کی مساوات $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (12 - 1)$ ہے



یعنی $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (12 - 1)$ اور شکل ۱۱ اس کا تعریف ہے

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (12 - 1)$ کی تعریف کی

شکل ۱۱

ہندسی ترجمانی رقبہ م ث ق ب کی قیمت دریافت کرنا ہے جبکہ معین ب ق لاتنا ہی تاکہ سیدھے جانب ہٹا چلا جاتا ہے۔ پہلی تعریف کے لحاظ سے

$$+ \infty \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا}$$

$$= \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا}$$

اس نتیجہ سے ظاہر ہے کہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ کو ہم دیے ہوئے مفہومی معین م ث ق ا دھو م لا سے گھیرا ہوا یا محلول د رقبہ کہہ سکتے ہیں۔ اگرچہ حقیقت یہ رقبہ بالکل گھیرا ہوا یا محدود نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۲) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{حل۔ دیا ہوا مکمل} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا}$$

ب کی قیمت جب نا متناہی طریقہ پر پڑتی ہے تو کوک ب کی انتہا وجود نہیں رکھتی۔ پس اس مثال میں مکمل بے معنی ہے۔

۱۔ اب ہم ایسی چند صورتوں سے بحث کریں گے جن میں متناہی

ما = نہ (لا) جس کا مکمل کرنا مقصود ہے مکمل کے مدود کے مابین متغیر کی جداگانہ قیمتوں کے لیے غیر مسلسل ہے۔

پہلے فرض کرو کہ تفاعل مدود و اور ب کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے با استثناء لا = و مسلسل ہے۔

اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ اور مہ مثبت ہے تو مکمل کے لیے ہم تعریف ذیل استعمال کریں گے:-

$$\text{ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا} = \text{نبا} \text{ ک } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \text{ فرلا}$$

بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہے۔
اب فرض کرو کہ تفاعل حدود $\frac{1}{a}$ اور b کے مابین $\frac{1}{a}$ کی تمام قیمتوں کے لیے باسثناء $\frac{1}{a} = b$ مسلسل ہے۔ تو اس کے لیے یہ تعریف استعمال کریں گے

$\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا = نہ $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا (۲)
بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہے۔

جب تفاعل دیے ہوئے حدود کے مابین $\frac{1}{a}$ کی تمام قیمتوں کے لیے باسثناء $\frac{1}{a} = b$ مسلسل ہے اور ج واقع ہے $\frac{1}{a}$ اور b کے درمیان۔
تو صہ اور صہ کو مثبت اعداد مان کر مکملہ کی اس طرح تعریف کریں گے :-

$\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا = نہ $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا
+ نہ $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا (۳)
بشرطیکہ یہ انتہا میں ملحدہ ملحدہ موجود ہیں۔

توضیحی مثال (۱) $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا کی تعیین کرو۔

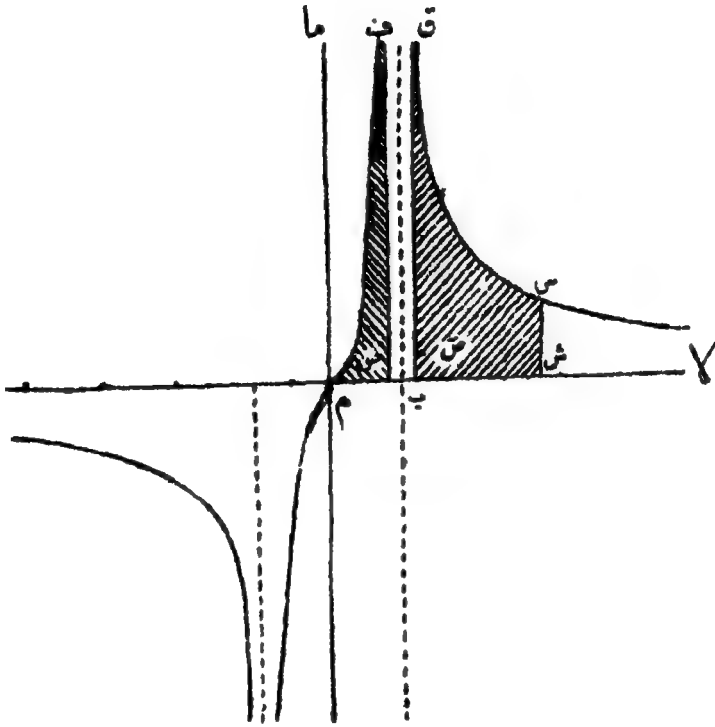
حل۔ اس مثال میں $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا ہی ہو جاتا ہے جبکہ $\frac{1}{a} = 1$ ۔

پس تعریف (۱) کے بموجب $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا = نہ $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا = نہ $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا
اس صورت میں کوئی انتہا نہیں ہے اس لیے مکملہ کا وجود نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۲) $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ اس مثال میں $\frac{1}{a}$ نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا نہ $(\frac{1}{a})$ فرلا ہی ہو جاتا ہے جبکہ $\frac{1}{a} = 1$ ۔

یعنی جوں جوں صفر کے قریب پہنچتا ہے رقبہ م ف ص ب ب کو بطور انتہا پہنچتا ہے۔



شکل ۶۱

سابقہ توضیحی مثال کی طرح ب ب کو ہم م ف، متقارب اور محور م لائے گھیرا ہوا رقبہ کہتے ہیں۔

$$\text{اسی طرح رقبہ م ق س ش} = \int_{\text{ب}}^{\infty} \frac{2 \sqrt{x}}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - \frac{1}{2} \right]_{\text{ب}}^{\infty}$$

اور وہ بطور انتہا ب ب کو پہنچتا ہے جسے صفر قرار دیا جائے۔

کی طرف پہنچتا ہے یعنی جوں جوں صفر کے قریب پہنچتا ہے۔ اس لیے
 ۶ ب ۲ کو ہم ق س، متضارب اور معین لا = ۳ ب ۲ کہتے ہیں۔ ان
 نتائج کو جمع کرنے سے ۹ ب ۲ حاصل ہوتا ہے جو محور م م کے
 سیدھے جانب کا رقبہ مابین منحنی معین لا = ۳ ب ۲ اور محور م م کا کہلاتا ہے۔

مثالیں

مندرجہ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :-

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{فرلا}{(1-لا^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{فرلا}{لا^2 + 2لا + 2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{فرلا}{لا^2 + 2لا + 2} = \pi$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{فرلا}{لا^2 + 2لا + 2} = \pi$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{فرلا}{لا^2 + 2لا + 2} = \frac{1}{2} \pi (2 - 2\sqrt{2})$$

پر غور کرو۔ اس مجموعہ کی انتہائی قیمت جبکہ n نامتناہی بڑا ہوتا ہے اور ہم ایک زیر وقفہ بطور انتہائی صفر کو پہنچتا ہے مساوی ہوتا ہے محدود تکملہ $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ (لا) فلا کے

مختصراً $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ (لا) فلا = $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ (لا) مف لا
اس مسئلہ کی اہمیت اس امر سے پیدا ہوتی ہے کہ ہم عمل تکمل سے ایک ایسی مقدار کو محسوب کر سکتے ہیں جو (۱) کی صورت کے مجموعہ کی انتہائی ہے۔

یہاں یہ یاد رہے کہ مجموعہ (۱) کی ہر رقم ایک تفرقی جملہ ہے اس لیے کہ طول مف لا، مف لا، ... مف لا بطور انتہائی صفر کو پہنچتے ہیں۔
اس مسئلہ کا جب عملی سوالات پر الحلاق کیا جاتا ہے تو مندرجہ ذیل قاعدہ بکار آ رہا ہوتا ہے۔

اساسی مسئلہ کا قاعدہ

پہلا عمل - مطلوبہ مقدار کو تشابہ حصص میں تقسیم کرو ایسے کہ نتیجہ واضح طور پر ان حصص کے حامل جمع کی انتہائی معلوم کرنے سے دریافت ہو جائے۔

دوسرا عمل - ان حصص کی مقداروں کے لیے ایسے جملے اخذ کرو کہ ان کا حامل جمع صورت (۱) کا سا ہو۔

تیسرا عمل - مناسب انتہائیں لا = ۱ اور لا = ب منتخب کر لینے کے بعد اساسی مسئلہ

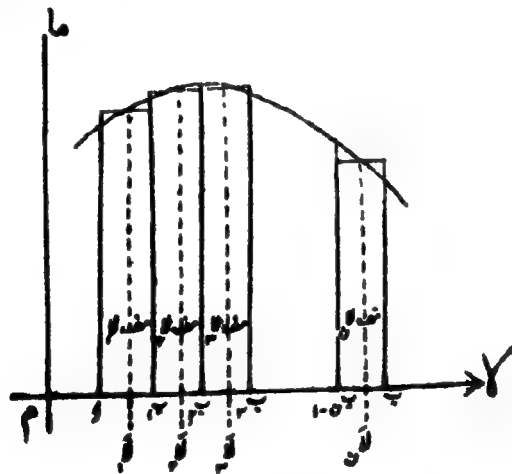
$$\sum_{r=1}^{\infty} f_r$$

نہا $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ (لا) مف لا = $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ (لا) فلا

استعمال کر کے مکمل انجام دو۔

۲۔ اساسی مسئلہ کا تحلیلی ثبوت۔

سابقہ فصل کی طرح لا = ۱ سے لا = ب تک کے وقفہ کو کوئی بھی ن عدد زیر وقفوں میں منقسم کرو جن کا مساوی ہونا لازمی نہیں۔ ان نقاط تقسیم کے فضلوں کو ب، ب، ب، ب سے تعبیر کرو اور زیر وقفوں کے طولوں کو مع ل، مع ل، مع ل، مع ل سے تعبیر کرو۔ اب فرض کرو کہ مسئلہ اوسط قیمت (باب دہم) کے ذریعہ ہر ایک زیر وقفہ میں ایک ایک فصلہ دریافت کیا جاتا ہے جو علی الترتیب لا، لا، لا، لا سے تعبیر کیا جاتا ہے ہر نقطہ پر ایک ایک معین بناؤ (دیکھو شکل ۶۲) اور ہر معین کے سرے میں سے افقی خط کھینچ کر ایک ایک مستطیل تیار کرو۔ یہ بات ذہن نشین رہے کہ یہاں اوسط قیمت کے مسئلہ والے ف (لا) کی جگہ ف (لا) ہے۔



شکل ۶۲

پس مساوات (ب) متعلق مسئلہ مذکور کے پہلے وقفہ (۱ = ۱ سے ۱ = ب) اور لا واقعہ

(جس میں لاؤ زیر وقفہ مفت لاؤ کا کوئی بھی فصلہ ہے، یہ رقبہ نہیں دیتا ہے، تاہم یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دونوں مجموعے (۲) اور (۳) مساوات کو پہنچ جاتے ہیں جبکہ ن ناقصا ہی بڑا ہوتا ہے اور ہر ایک زیر وقفہ بطور انتہائی کے صغیر کو پہنچتا ہے۔ کیونکہ تفاوت فہ (لاؤ) - فہ (لاؤ) کی عددی قیمت مفت لاؤ میں اعظم و اقل معینوں کے تفاوت سے زیادہ نہیں ہوتی ہے معذرا یہ ہر وقت ممکن ہے (اگرچہ اس کا ثبوت تالیف ہذا کے نصاب سے باہر ہے) کہ ان تمام تفاوتوں کو بحفاظت عددی قیمت کے کسی مقررہ (assignable) مثبت عدد صہ سے، خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو، وقفوں کی تقسیم و تقسیم کافی مدت تک عمل میں لا کر (یعنی بالفاظ دیگر ن کو کافی بڑا لے کر) کمتر بنا دیا جائے۔ پس ایسے ن کے لیے مجموعوں (۲) اور (۳) کا تفاوت عددی قیمت میں صہ (ب - ۱) سے بقدر کسی مقررہ مثبت مقدار کے خواہ وہ کتنی ہی صغیر ہو کمتر ہے۔ پس وجہ ن جیسے جیسے ناقصا ہی بڑا ہوتا ہے مجموعہ (۲) اور مجموعہ (۳) باہم دیگر قریب تر مساوی ہونے جاتے ہیں اور چونکہ (۲) ہمیشہ رقبہ کے مساوی ہوتا ہے، اساسی نتیجہ ذیل برآمد ہوتا ہے :-

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_n \quad \text{فہ (لاؤ) مفت لاؤ}$$

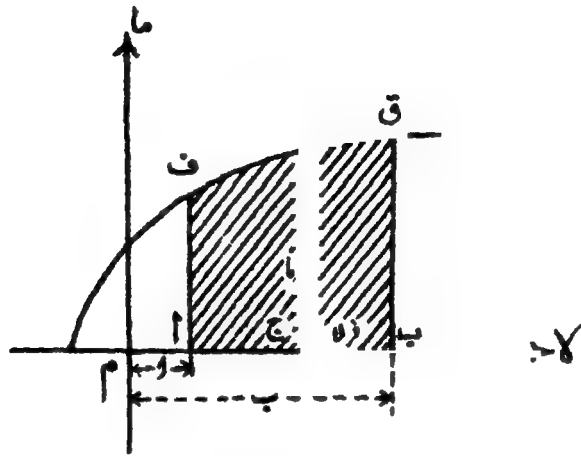
جس میں وقفہ [ا ب] کی کسی طرح سے بھی تقسیم و تقسیم عمل میں لائی جاتی ہے اور لاؤ متناظر زیر وقفہ میں کوئی فیصلہ ہے۔

۳۔ مستوی منحنیوں کے رقبے علی التواہم محدود

شکل ۶۳ پر غور کرنے سے واضح ہو گا کہ رقبہ مابین منحنی فوقی محور لا

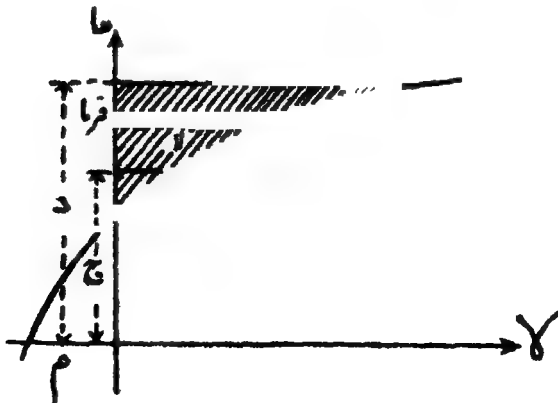
اور معین لا = ۱ ولا = ب = کم یا فلا (۱)

ما کو لاکی رستموں میں قویٰ بن کرنے اور مصرعہ بالا محدود تکملہ



شکل ۶۳

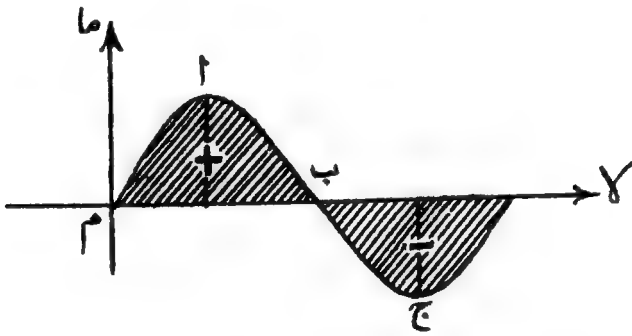
محسوب کرنے سے مطلوبہ رقبہ دریافت ہو جاتا ہے۔
 اسی طرح شکل ۶۴ پر غور کرنے سے واضح ہو گا کہ رقبہ مابین منحنی،
 محور ما اور افقی خطوط $a = ج$ اور $a = د = کج$ لا فرما (ب)



فصل ۶۲

لاکھوں کی رقموں میں تفویض کرنے اور مصرعہ بالا محدود و مکملہ محسوب کرنے سے مطلوبہ رقبہ دریافت ہو جاتا ہے۔ رقبہ کے سامنے منفی علامت لکھی جائے تو اس کا کیا مفہوم ہے؟ ضابطہ (۱) میں ذکر ہے ب سے۔ چونکہ

لہذا ما فرلا سے مراد $\sum_{i=1}^n$ (لا) صفت لا ہے اور اس مجموعہ میں $0, 1, 2, 3, \dots$ ۔ ن تو اگر فہ (لا) یا ما منفی ہو اس مجموعہ کی ہر ایک رقم منفی ہوگی اور ضابطہ (۱) ایک ایسا رقبہ دیگا جس کے سامنے منفی علامت ہوگی۔ اس کے یہ معنی ہونگے کہ رقبہ مذکور محور لا کے نیچے ہوگا۔ جیسے جیسی منحنی ما = جب لا سے متعلق م ا ب ج د کی کمان م ا ب کا رقبہ مثبت ہے اور کمان ب ج د کا رقبہ منفی ملاحظہ ہو شکل ۶۵۔



شکل ۶۵

کیونکہ ما = صفر لکھ کر لا کے لیے مل کرنے سے
لا = $0, 1, 2, 3, \dots$ وغیرہ

اور ضابطہ (۱) سے رقبہ م ا ب = $\sum_{i=1}^a$ جب لا فرلا = ۲

اور رقبہ ب ج د = $\sum_{i=b}^d$ جب لا فرلا = ۲-

توضیحی مثال - خط مکانی لا = ۱۲ اور ڈائن = ۱۸
 $\frac{18}{12+18}$

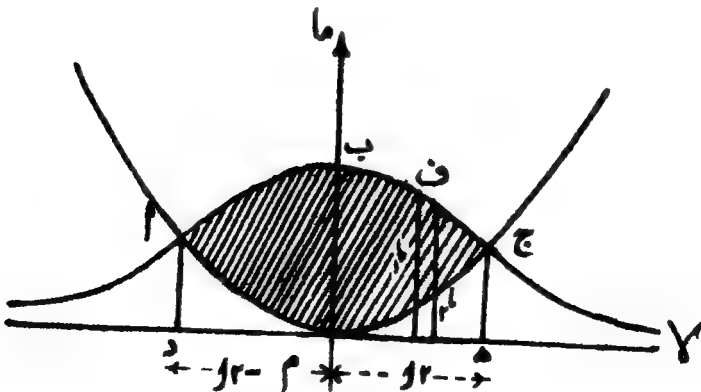
کار میانی رقبہ معلوم کرو۔
 حل - اس کو دو طرح سے حل کر سکتے ہیں۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ
 مکمل کے حدود معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساواتوں کو ہمزاد تصور کر کے مشترک
 لا و ما کی قیمتیں دریافت کر لی جائیں۔ یہ $(12, 18)$ اور $(18, 12)$
 برآمد ہوتی ہیں۔ شکل ۶۶ میں ان نقطوں کو علی الترتیب ۱ اور ۲ سے نامزد کیا گیا ہے۔
 جس رقبہ کی تعیین مطلوب ہے وہ ۱ م ج ب = رقبہ ۲ م ج ب - رقبہ ۱ م ج ب ہے۔
 لیکن رقبہ ۲ م ج ب = ۱۸ × رقبہ ۱ م ج ب

$$18 = \frac{18}{12+18} \times 12$$

اور رقبہ ۲ م ج ب = ۱۸ × رقبہ ۱ م ج ب

$$18 = \frac{18}{12+18} \times 12$$

پس رقبہ ۱ م ج ب = $18 - \frac{18}{12+18} \times 12$ جواب



شکل ۶۶

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ پٹی ف مں کو مطلوب رقبہ کا ایک عنصر تصور کیا جائے
اگر ما کو معین متعلق ڈائن قرار دیا جائے اور ما کو معین متعلق خط مکانی تو پٹی ف مں کے
رقبہ کے لیے تفرقی جملہ = (م - مام) فرلا اس میں ما اور با کی قیمتیں لاکھ رقموں میں غلطی کرنے
سے رقبہ ۱۰ ج ب

$$x^2 = \text{رقبه م ج ب} = 2 \int (1, 1) (1, 1) \text{ فرلا}$$

$$\left(\frac{r}{r} - \pi\right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - \pi \right) \int_0^r r =$$

مشائیں

(۱) اثبات کرو کہ دو خط مماس کافی $\hat{A} = \hat{A}'$ اور $\hat{B} = \hat{B}'$ کا درمیانی رقبہ $\frac{1}{2}$

(۳) ثابت کرو کہ معنی لائے + مائے = لائے کا کامل رقبہ $\frac{3}{4}\pi$ ہے۔

(۳) بتاؤ کہ مساوی المحورین بذولی (قطع زائد) لا۔ ما۔ و۔ محور لا اور مبدأ

سے منحنی پر کے کسی نقطہ (لا، نا) سے گھیرا ہوا رقبہ = $\frac{1}{2}$ کوک $(\frac{لا+نا}{2})$

(۳) ثابت کرو کہ محور لا، خطِ مکانی 'ا' = m ولا اور خطِ مستقیم $m + 2$ لا

۴ = اسے محدود رقبہ = $\frac{4}{\pi}$ [اولاً خط مکانی اور خط مستقیم کی ترسیمیں تیار کر لی جائیں۔]

(۵) ثابت کرد کہ بند معنی (۱- لا- ۳) = ۲- لا- خطوط لا = ۲- اور لا = ۲+

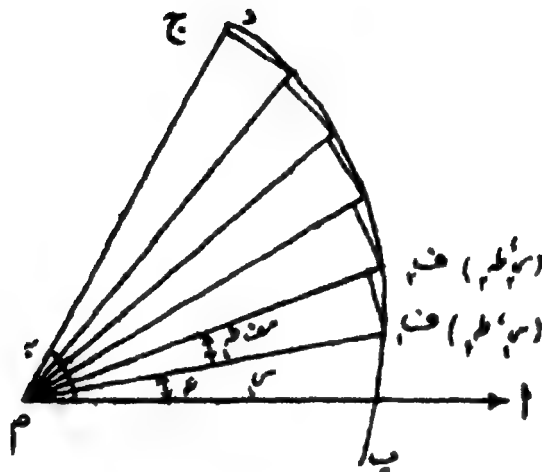
کے درمیان واقع ہے، اس کی ترسیم کہیں اور بتاؤ کہ اس کا رقبہ ۳۴ ہے۔

۴۔ مستوی مخنیوں کے رقبے۔ قطبی محور۔

فرض کرو کہ ایک منحنی اور اس کے دو نیم قطر سمتیوں سے محدود رقبہ کی تعبیر مطلوب ہے۔

منحنی کی مساوات کو $y = f(x)$ مان کر فرض کرو کہ M اور m دیے ہوئے سمتی نقطہ ہیں (دیکھو شکل ۶۷) جو قطبی محور کے ساتھ

علی الترتیب زاویہ م و ب بنتے ہیں۔ اب مل کا اساسی مسئلہ استعمال کرو۔



شکل ۷۷

اولاً مطلوبہ رقبہ بلاشبہ شکل میں بنائے ہوئے دائری قطاعوں کا حاصل

جمع ہے۔ ثانیاً فرض کرو کہ متواتر قطاعوں کے مرکزی زاویے $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ وغیرہ ہیں۔ اور ان کے نیم قطر $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ وغیرہ ہیں۔ تب ان قطاعوں کے رقبوں کا حاصل جمع

$$= \frac{1}{2} r_1^2 \theta_1 + \frac{1}{2} r_2^2 \theta_2 + \frac{1}{2} r_3^2 \theta_3 + \dots + \frac{1}{2} r_n^2 \theta_n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \theta_i$$

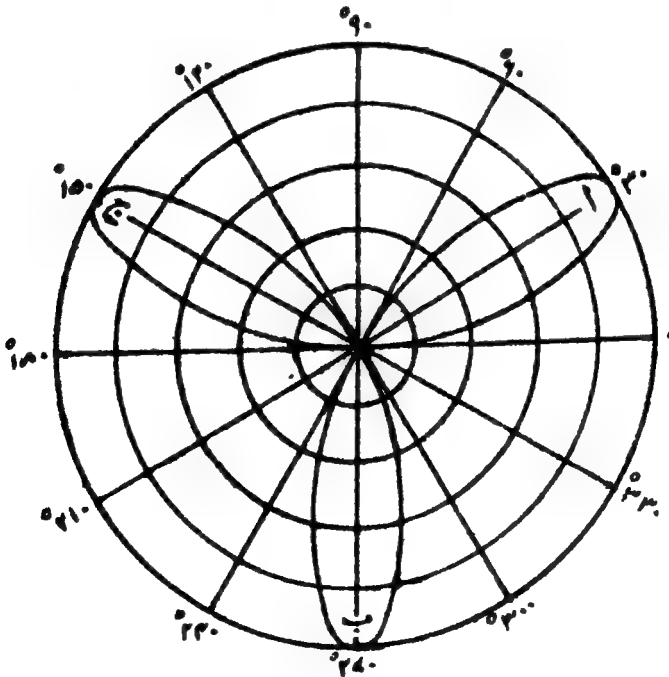
اس لیے کہ دائری قطاع کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ نیم قطر \times قوس = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ وغیرہ۔

مثلاً اساسی مسئلہ استعمال کرنے سے

نسباً $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ سر ۱ مف طہ = $\frac{1}{2}$ سر ۱ فرط
پس جبکہ منحنی کا نیم قطر سمتی وضع م ف سے نکل کر وضع م د میں پہنچتا ہے
تو اس سے جو رقبہ بنتا ہے

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ سر ۱ فرط} \dots \dots \dots (د)$$

منحنی کی مساوات سے سر کی قیمت طہ کی رقبوں میں تعویض کی جاتی ہے -
تو منحنی مثال (۱۱) منحنی م = ۱ جب ۳ طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کر دو۔
حل۔ شکل ۶۵ میں اس منحنی کی ترسیم بنائی گئی ہے۔ شکل کے مطالعہ سے



شکل ۶۵

فورا معلوم ہو جاتا ہے کہ اس کے بنانے کا کیا طریقہ ہے۔ ہمیں کسی ایک حلقہ کا رقبہ یقین کرنا ہے۔

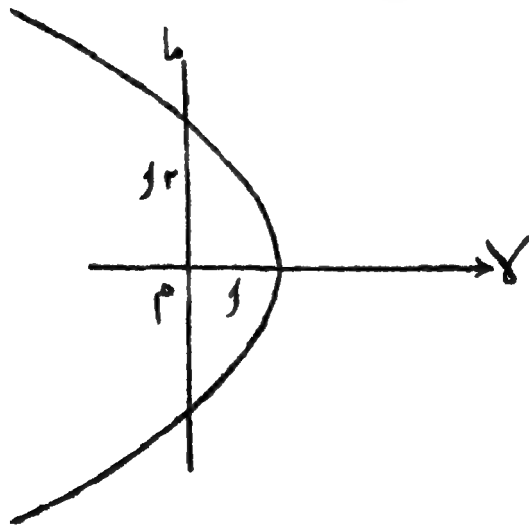
واضح ہے کہ یہ رقبہ $\frac{1}{4} \pi r^2$ جب $r = 2$ طہ فرطہ تکمل کرنے کے لیے 2 طہ کے عوض 2π لکھو

$$\text{تب رقبہ} = \frac{1}{4} \pi r^2 \text{ جب } r = 2 \text{ طہ فرطہ} = \frac{1}{4} \pi (2)^2 = \frac{1}{4} \pi (4) = \pi$$

جواب $\frac{1}{4} \pi =$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ خط مماسی $r = 2$ طہ کا وہ رقبہ

جو مغنی اور اس کے مرتب کے درمیان واقع ہے $\frac{1}{4} \pi$ ہے۔
 حل۔ ملاحظہ ہو شکل ۶۹، اس سے معلوم ہو جائیگا کہ تکمل کے حدود کیا ہونے چاہئیں:—



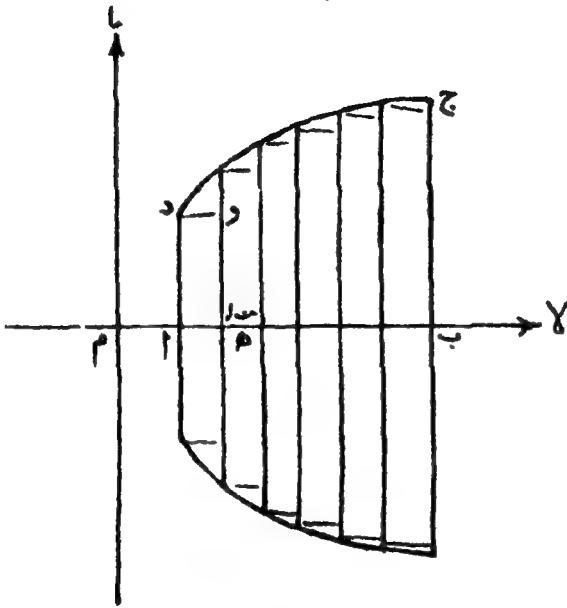
شکل ۶۹

$$\begin{aligned}
 \text{رقبہ} &= 2 \times \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

مثالیں

- (۱) اچٹھ منحنی سر = اُجم ۲ طہ کا پورا رقبہ دریافت کرو [جواب = $\frac{\pi}{2}$]
 - (۲) ثابت کرو کہ منحنی سر = اُجم ۲ طہ کا پورا رقبہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔
 - (۳) ارشمیدس کی ٹوبی سر = اُط کے نیم قطر سمتی کی ایک پوری گردش میں (ط = ۰ سے آغاز کر کے) کس قدر رقبہ تیار ہوتا ہے؟ دوسرے مکمل گردش میں کس قدر مزید رقبہ بنتا ہے؟ [جواب (۱) = $\frac{\pi}{2}$ ، (۲) = $\frac{\pi}{2}$]
 - (۴) سر = اُج جب ۲ طہ سے گھیرا ہوا رقبہ دریافت کرو [جواب = $\frac{\pi}{2}$]
 - (۵) منحنی سر = اُ (جب ۲ طہ + جم ۲ طہ) کا پورا رقبہ دریافت کرو [جواب = $\frac{\pi}{2}$]
 - (۶) ثابت کرو کہ ذلولی ٹوبی سر = $\frac{\pi}{2}$ کا رقبہ جو اس کے کسی دو سمتی نیم قطروں سے محدود ہے تناسب ہے ان نیم قطر سمتیوں کے طولوں کے تفاوت کے۔
 - (۷) بتاؤ کہ خط ناقص سر = $\frac{\pi}{2}$ جب ۲ طہ + ج ۲ طہ کا رقبہ $\frac{\pi}{2}$ ہے۔
- ۸۔ گردشیں مجسموں کے حجم۔ فرض کرو کہ شکل ۸ میں

محور لا کے گرد مستوی سطح اب ج د کے گھومنے سے جو مجسم شکل پیدا ہوتی ہے اس کا حجم ح ہے اور مستوی منحنی د ج کی مسادات ما = ف (لا) ہے



شکل نہ

اولاً - مستوی رقبہ اب ج د میں شکل بنت کی طرح مستطیل شکلیں
اھ و د وغیرہ تیار کرو۔ جب یہ رقبہ محور لا کے گرد گھمایا جاتا ہے تو ہر ایک
مستطیل ایک گردشی اسطوانہ بناتا ہے۔ مطلوبہ حجم صریحاً ان اسطوانوں کے
جھول کے مثل مجموعہ کی انتہا کے مساوی ہے۔

ثانیاً - مصرعہ بالا مستطیلوں کے قاعدوں کو 'مف لا'، 'مف لا' وغیرہ
قرار دو اور ان کے متناظر ارتفاعوں کو 'با'، 'با'، وغیرہ۔ تب مستطیل
اھ و د سے تیار شدہ اسطوانہ کا حجم π 'مف لا' ہو گا۔ اور ایسے تمام
اسطوانوں کے جھول کا مجموعہ

$$\pi \text{ 'مف لا' } + \pi \text{ 'مف لا' } + \dots + \pi \text{ 'مف لا' } = \pi \sum_{i=1}^n \text{ 'مف لا' }_i$$

$$\therefore \int_0^{100} \pi = \pi (100 - 0) \text{ فرلا}$$

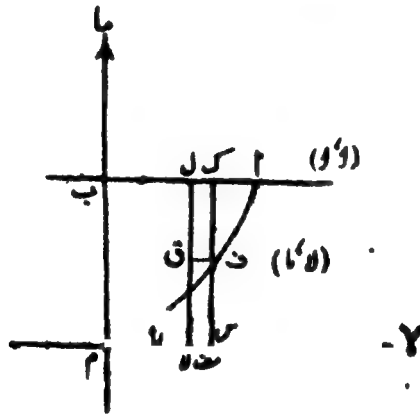
$$= \pi \left[\frac{100^2}{2} \right] - \pi \left[\frac{0^2}{2} \right] = \pi \left[\frac{10000}{2} \right] = \pi \times 5000$$

$$= \frac{\pi \times 10000}{2} \text{ کعب انچ جواب}$$

توضیحی مثال (۲) نیم کبی مکانی $LA = L^2$ 'محور' MA اور خط AB ($MA = 1$)

(شکل ۷۲) سے محود رقبہ خط AB کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ گردشیں مجسم کا حجم معلوم کرو۔

حل۔ شکل میں گردشیں رقبہ MA بتایا گیا ہے۔ اگر خط AB کو n مساوی حصوں میں (ہر ایک = MA/n) تقسیم کیا جائے تو n



شکل ۷۲

ان میں سے ایک حصہ ہر گاہ۔ مستطیل MA کو n حصوں میں تقسیم کیا جائے جس کا حجم مطلوبہ مجسم کا

ایک جزو ہے۔ پس

جزو یا عنصر حجم = π (ف ک) \times مع لا
(ف ک) = $\frac{1}{2} \times$ ما :۔ اساسی مسئلہ کی رو سے

مجمجم حجم = ح = $\pi \times (1 - 1) \times$ فر لا = $\pi \times (1 - 1) \times (1 + 1 + 1 + 1) \times$ فر لا

کبھی مکانی کی مساوات سے ما = $\frac{1}{2} \times$ یہ قیمت مکمل میں تعویض کرنے سے ح کی قیمت ۳۴۵ π برآمد ہوتی ہے۔

مشالیں

(۱) قطع ناقص $\frac{1}{4} \times$ + $\frac{1}{4} \times$ = اکو محور لا کے گرد گھمانے سے

جو حجم بنتا ہے اس کی قیمت دریافت کرو۔ [جواب = $\frac{1}{4} \times \pi \times$ (ب ۲)]

(۲) گردشی مکانی نما کا حجم دریافت کرو جس کی سطح ما = ۲ ف لا کی قوس کو اس کے محور کے گرد مابین مبدا و نقطہ (لا، ما) گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔

[جواب = $\frac{1}{4} \times \pi \times$ (ب ۲)]

(۳) اگر مثال (۲) کی قوس کو محور م ما کے گرد گھمایا جائے تو بناؤ کہ

حجم = $\frac{1}{4} \times \pi \times$ (ب ۲)

(۴) ثابت کرو کہ درتدویر لا + ما = $\frac{1}{4} \times$ سے محدود رقبہ کو محور م لا

کے گرد گھمانے سے حجم $\frac{1}{4} \times \pi \times$ بنتا ہے۔

(۵) من نصف قطر کے ٹھوس کرہ سے ایک قاعدہ والا ٹ مٹائی کا

قطاع تراشا جاتا ہے۔ عمل مکمل سے ثابت کرو کہ اس کا حجم $\frac{1}{4} \times \pi \times$ (۳ ص - ٹ)

(۶) زنجیرہ (catenary) $\frac{1}{4} \times$ = $\frac{1}{4} \times$ (تو + تو) کو محور لا کے گرد

(ما بین حدود لا = ۰ اور لا = ب) گھمانے سے جو حجم بنتا ہے

اس کی تعین کرو۔ [جواب = $\frac{\pi}{8} (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2} (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})$]

(۶) بتاؤ کہ لیبلائی خط (cissoid) $MA^2 = \frac{LA^2}{LA - 92}$ کو اس کے

مستقارب لا = ۲ کے گرد گھمانے سے جو حجم حاصل ہوتا ہے π^2 ہے۔
نوٹ :- شکل ۱۸ کے منحنی ج د اسی مساوات اگر مبتدی صورت

لا = ف (و) اور ما = فہ (و) میں دی جائے تو

ضابطہ (۸) یعنی حجم ح = π کو ما فرلا میں ما = فہ (و) اور

فرلا = فہ (و) فرو تعویض کرو اور حدود مکمل کو م اور و میں تبدیل کرو اگر

د = و جبکہ لا = ۱ اور و = و جبکہ لا = ب

مثال (۱) (hypocycloid) کی مبتدی مساوات $\{ \begin{matrix} لا = و حجم ۲ طہ \\ ما = و جب طہ \end{matrix} \}$

استعمال کر کے منحنی مذکور کو محور م لا کے گرد گھمانے سے جو حجم حاصل ہوتا ہے اس کا حجم دریافت کرو۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ خط تدویر (cycloid) $\{ \begin{matrix} لا = ۱ طہ - جب طہ \\ ما = ۱ طہ - حجم طہ \end{matrix} \}$ کو

محور م لا کے گرد گھمانے سے جو حجم بنتا ہے π^2 ہے۔

مثال (۳) اگر خط تدویر کو اس کے قاعدہ م لا کے گرد گھمایا جائے

تو بتاؤ کہ حجم π^2 ہے



۱۔ منحنی کا طول۔

شکل ۱۸ میں ایک منحنی اب دیا گیا ہے۔ اس کا طول ناپنے کے لیے اس کو متعدد حصوں میں جیسے ج د و د و ز پر

شکل ۱۸

نشان لگا کر تقسیم کرو اور تقسیم کے متصل نقطوں کو خطوط مستقیم کھینچ کر ملاؤ۔ اس طرح
 وتر 'ج' 'د' 'و' 'ہ' 'ز' 'ب' تیار ہوں گے۔ واضح ہے کہ نقاط تقسیم
 جتنے بھی زیادہ ہوں گے ان کے متعلقہ وتروں کا حاصل مجموعہ منحنی کے طول کے قریب تر
 مساوی ہوگا۔ پس منحنی کے طول کی یوں تعریف کی جاتی ہے کہ
 وہ منحنی کے وتروں کے مجموعہ کی انتہا ہے جیسے جیسے
 اس کے نقاط تقسیم کی تعداد نامتناہی بڑی ہوتی جاتی ہے
 اور ساتھ ہی ساتھ ہر ایک وتر فرداً فرداً بطور انتہا صفر
 کو پہنچ جاتا ہے۔ چونکہ یہ انتہا کسی خط مستقیم کے طول کی بھی پیمائش
 ہوگی اس لیے منحنی کے طول کی تعین کو اس کی خطوط مستقیم بھی کہتے ہیں۔

بے۔ منحنیوں کے طول، علی القوائم محدود

کی رقموں میں۔ فرض کرو کہ منحنی شکل مسکے کی مساوات $y = f(x)$ ہے اس کی قوس $\int_a^b f(x) dx$ کا طول معلوم کرنے کے لیے [جس میں f کے محدد (اُچ) ہیں اور q کے محدد (ب، د)]

اولاً۔ دسی ہوئی قوس پر مابین ف اور ق کوئی بھی ن عدد نقطے کو اور متصل نقطوں کو ملائے والے وتر کھینچو۔

واضح ہے کہ قوس فوق کا مطلب: طول
مصرعہ بالا و تروں کے حامل جمع کی انتہا ہے۔

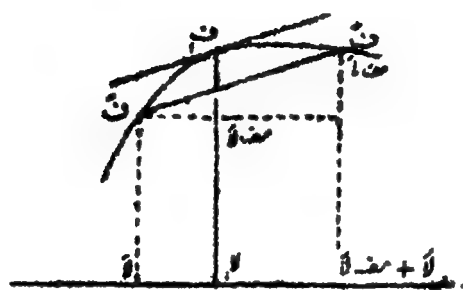
ثانیاً۔ ان میں سے کسی ایک

وترِ مِثْلًا فِ فِ پر غور کرو اور فرض کرو کہ

مَن کے محمد (لَا، مَا) ہیں اور ف کے

محدود (لَا + مفعلاً، مَا + مفعلاً)

$$فَ ق = \frac{1}{ف} \left(\frac{مضاً}{ف} + 1 \right) = \frac{مضاً + ف}{ف}$$



شکل ۶۵

لیکن باب دہم کی فصل متعلق مسائل اوسط قیمت اگر مف ماکوف (ب)
- ف (۱) سے تعبیر کیا جائے اور مف لاکوب - ۱ سے تو

$$\text{مف} = \text{ف} (ل) \quad [\bar{u} > \bar{u} > \bar{u} + \text{مف} \bar{a}]$$

جس میں لا مسخنی پر کے ایک نقطہ ف کا (جوف اور ف کے مابین واقع ہے اور جہاں خط مماس وتر کے متوازی ہے) فاصلہ ہے

ابدال سے ف + ف = [ا + ف (لا)] مف لا = پہلے وتر کا طول
اسی طرح ف + ف = [ا + ف (لا)] مف لا = دوسرے وتر کا طول

ف^(ن) ق = [ا + ف (لا)]^ا مت لا^(ن) = ن میں وتر کا طول
 ہیں ف اور ق کو ملانے والے قوس کے اندر کچھ ہوئے عکسہ خطوط کا طول
 (یعنی جملہ وتروں کا مجموعی طول)

$$= (+\text{ف (لا)}) + (+\text{ف (لا)}) + (-\text{ف (لا)}) + (+\text{ف (لا)}) =$$

$$= (+\text{ف (لا)}) + (+\text{ف (لا)}) =$$

ثالثاً۔ اساسی مسئلہ کی روش سے

$$\text{نہا} \frac{\infty}{1} = [ا + ف (لا)]^{\frac{1}{2}} = [ا + ف (لا)]^{\frac{1}{2}} \text{ فرلا}$$

اس لیے اگر قوس ف ق کا طول س سے تعبیر کیا جائے تو قوس کے طول کا ضابطہ ہے۔

$$\text{س} = [ا + ف (لا)]^{\frac{1}{2}} \text{ فرلا یا س} = [ا + ف (لا)]^{\frac{1}{2}} \text{ فرلا} . (ز)$$

جس میں ما = $\frac{فرلا}{قوس}$ قوس کی مساوات کے ذریعہ لا کی رقموں میں معلوم کر لیا جانا چاہیے۔

بعض اوقات ما کو متبوع متغیر ماننے میں زیادہ سہولت پائی جاتی ہے

$$\text{ایسی صورت کے لیے چونکہ } \frac{فرلا}{قوس} = \frac{1}{\frac{قوس}{فرلا}} \text{ فرلا} = \frac{1}{\frac{قوس}{فرلا}} \text{ فرلا اور ان قیمتوں کو}$$

ضابطہ (ز) میں تعویض کرنے اور متناظر حدود تکمیل ج اور د قرار دینے سے قوس کے طول کا ضابطہ

$$\text{س} = [ا + ف (لا)]^{\frac{1}{2}} \text{ فرما} \dots \dots \dots (ح)$$

جس میں لا = $\frac{فرلا}{قوس}$ قوس کی مساوات کے ذریعہ ما کی رقموں میں معلوم کر لیا جانا چاہیے۔

ضابطہ (ز) ایک دوسرے طریقہ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے۔

آٹھویں باب کی فصل (۷) میں ضابطہ (د)

$$\text{فرس} = [ا + ف (ما)]^{\frac{1}{2}} \text{ فرلا} \dots \dots \dots (ا)$$

منعنی کی قوس کا تفرقہ معلوم کرتا ہے۔ اگر ہم بارہویں باب کی فصل متعلق یہ محدود تکمیل عمل کریں تو ضابطہ (ز) مصرعہ بالا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح آٹھویں باب کی فصل محمولہ بالا کے ضابطہ (ھ) سے ہمارا ضابطہ (ح) ترتیب

ہوتا ہے۔

اگر مخنی کی تعریف تبدیلی مساواتوں

$$لا = فت (و) اور ما = فہ (و)$$

کے ذریعہ کی گئی ہو تو اس کی تعین کا سہل طریقہ یہ ہے کہ

$$س = \int (فرلا + فرا) = \int [فت (و) + فہ (و)] \cdot فرو (و) \quad (۳)$$

اس لیے کہ (۲) سے فرلا = فت (و) فرو اور فرما = فہ (و) فرو

توضیحی مثالیں۔

$$(۱) \text{ درتدویر (hypocycloid) } \left. \begin{array}{l} لا = رجم طہ \\ ما = رجب طہ \end{array} \right\} \text{ کا طول دریافت کرو۔}$$

حل۔ عمل تفرق سے فرلا = ۳ رجم طہ فرط

فرما = ۳ رجب طہ فرط

جبکہ لا = ۰ طہ = $\frac{\pi}{۲}$ اور جبکہ لا = $\frac{\pi}{۲}$ طہ = ۰

ضابطہ میں یہ قیمتیں تعویض کرنے سے، مخنی کا طول

$$س = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ + \left(\frac{فرلا}{فرما}\right)^2} فرلا = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ + ۹} رجم طہ فرط$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱۰} رجم طہ فرط = \sqrt{۱۰} \left[\frac{۳}{۲} رجم طہ \right]_0^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲} \cdot \frac{\pi}{۲}$$

(۲) خط مکانی لا = ۳ و ما کی قوس کا طول راس سے لے کر وتر خاص

کے ایک سرے تک دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ ما = $\frac{لا}{۳}$ ، $\frac{لا}{۳} = \frac{لا}{۳}$ اور تکمل کے حدود میں لا = ۰ اور لا = $\frac{\pi}{۲}$

$$\text{پس } س = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ + \left(\frac{فرلا}{فرما}\right)^2} فرلا = \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ + \frac{لا^2}{۹}} \cdot \frac{لا}{۳} = \frac{۱}{۳} \int_0^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۹ + لا^2} \cdot لا$$

$$= \frac{۱}{۳} \left[\frac{۱}{۲} (۹ + لا^2) \cdot لا + \frac{۹}{۲} \ln \left(لا + \sqrt{۹ + لا^2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۳} \left[\frac{۱}{۲} (۹ + \frac{\pi^2}{۴}) \cdot \frac{\pi}{۲} + \frac{۹}{۲} \ln \left(\frac{\pi}{۲} + \sqrt{۹ + \frac{\pi^2}{۴}} \right) \right]$$

$$= [(۲۱ + ۱) \text{ لوک}]$$

۸۔ مستوی منحنیوں کے طول کی پیمائش

قطبی محدودوں کے ذریعے — آٹھویں باب کی فصل (۸)

کے ضابطہ (ط) پر محدود تکمیل کا عمل کرنے سے قوس کے طول کے لیے ضابطہ

$$س = \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{فرط}{فرط} \right)^2 + ۱ \right]^{\frac{1}{2}} فرط \dots \dots \dots (ط)$$

حاصل ہوتا ہے۔ جس میں $س$ اور $\frac{فرط}{فرط}$ کو ط کی رقوموں میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے اخذ کر کے تعویض کرنا چاہیے۔

جن صورتوں میں بجائے ط کے

$س$ کو بطور متبوع متغیر استعمال کرنا

زیادہ آسان معلوم ہوتا ہے اور

مساوات بشکل

$$ط = فن (س) \text{ ہے تو}$$

$$فرط = فن (س) فرط = \frac{فرط}{فرط}$$

شکل ۷

اس کو $[س \text{ فرط} \text{ فرط}]$ میں تعویض کرنے سے

$$[س \left(\frac{فرط}{فرط} \right)^2 + ۱]^{\frac{1}{2}} فرط \text{ حاصل ہوتا ہے}$$

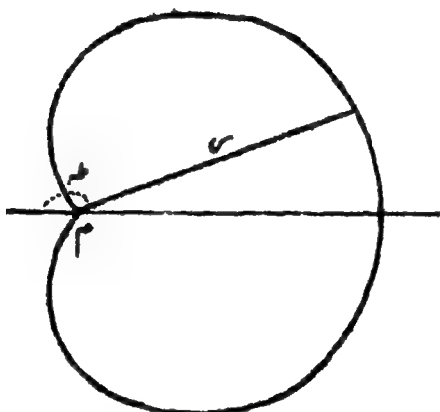
پس اگر $س$ اور $س$ متبوع متغیر $س$ کے متناظر حدود تکمیل ہیں تو قوس کے طول کے لیے

$$ضابطہ س = \int_0^{\pi} \left[\left(\frac{فرط}{فرط} \right)^2 + ۱ \right]^{\frac{1}{2}} فرط \dots \dots (ی) \text{ برآمد ہوتا ہے۔}$$

جس میں $\frac{فرط}{فرط}$ کو دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے $س$ کی رقوموں میں

تقریب کرنا چاہیے۔

توضیحی مثال۔ خط منوبری $s = l$ (۱۔ جم ط) کا محیط دریافت کرو۔
حل۔ معنی کی ترسیم شکل ۷۷ میں بتائی گئی ہے وہ ابتدائی خط کے تشاکل ہے۔



شکل ۷۷

اد ط کی قیمت اوپر والی نصف ترسیم کے لیے صفر سے لے کر π تک بدلتی ہے۔

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} = \text{اجب ط}$$

$$\text{پس قوس مس} = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} = 2$$

$$2 = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} = 2$$

مثالیں

بتاؤ کہ :-

(۱) نیم کبی مکانی $l = 2$ کا طول مبدار سے لے کر سمت $l = 0$ تک

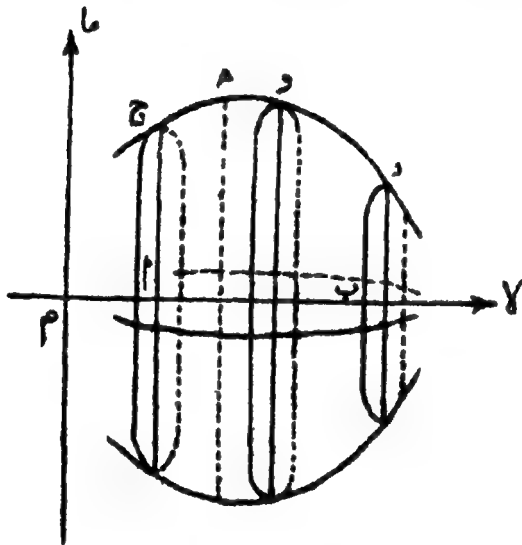
$\frac{1}{2} \pi$ ہے۔

(۲) درتدویر (hypocycloid) $l = 2$ کا مکمل طول ۶ ہے۔

۹۔ گردشی سطحوں کے رقبے۔ گردشی سطح مخروط کے

گردشی منحنی ما = ف (لا) کی قوس ج د کے گھومنے سے پیدا ہوتی ہے۔
اب ہم اساسی مسئلہ کی مدد سے ایسی سطح کے رقبہ کی پیمائش کا طریقہ بیان کرنا چاہتے ہیں۔

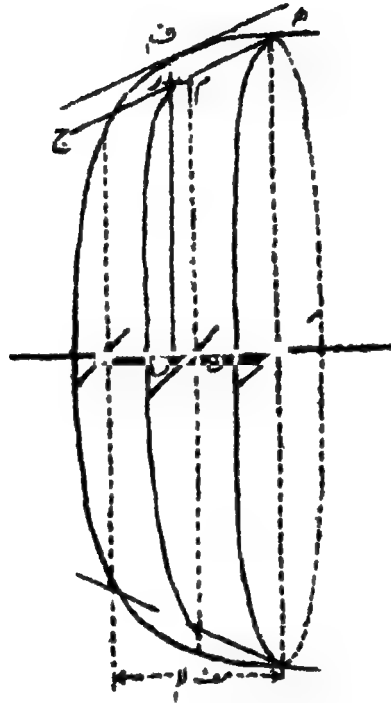
اولاً۔ مثل سا بن وقفہ یا فاصلہ اب کو کو چکر حصوں ص ف لا، ص ف لا وغیرہ میں تقسیم کر دے نقاط تقسیم پر متین کھرا کر و منحنی کے وتر ج د، ہ د، و وغیرہ کیونچہ۔



شکل ۷۵

جب منحنی ج د کو گھمایا جاتا ہے تو ہر ایک وتر ایک ناقصی یا اکمل (مقطوع) گردشی مخروط کی جانبی سطح پیدا کرتا ہے۔ منحنی کی گردشی سطح کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ ان ناقصی گردشی مخروطوں کے جانبی رقبوں کی انتہا ہے۔
ثانیاً۔ وضاحت کی خاطر ہم نے شکل ۷۵ میں پہلے ناقص گردشی مخروط کو زیادہ بڑے پیمانہ پر بنایا ہے۔ اس شکل میں وتر ج د کا وسطی نقطہ م ہے۔

تب چونکہ ناقص گروشی مخروط کا جانبی رقبہ = وسطی تراش \times ترجیحی بلندی
جانبی رقبہ = πr^2 (ن م) (ج ہ) (۱)



شکل ۹

اسی مسئلہ کے اطلاق کے لیے اس حاصل ضرب کو وقفہ معن لا میں کسی نقطہ کے مقطع یا فصل کا تفاعل ظاہر کرنا چاہیے۔ مث کی طرح اوسط قیمت کا مسئلہ استعمال کرنے سے

وتر ج ہ کا طول = $\{1 + f(l)\} \times$ معن لا (۲)

جس میں لم قوس ج ہ پر کے نقطہ ف (ل، ل) کا مقطع ہے، جہاں خط عکس وتر ج ہ کا متوازی ہے۔ م میں سے جو افقی خط کیمنیہا گیا ہے

اس کو ف پر کے معین ق ف کو نقطہ ر پر متعلق ہونے دو۔ اور ر ف کو صم سے تعبیر کرو۔

[طالب علم کو معلوم ہو گا کہ جیسے جیسے صم لا صفر کو بطور انتہا پہنچتا ہے صم بھی بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے]

تب $n = m - صم \dots \dots \dots (۳)$
(۲) اور (۳) کو (۱) میں تعویض کرنے سے

$\pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ پہلے آتص مخروط کا جانی رقبہ ہے۔
ایک $\pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ دوسرے آتص مخروط کا جانی رقبہ ہے۔

اور $\pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ آخری آتص مخروط کا جانی رقبہ ہے۔
پس $\sum_{i=1}^n \pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ آتص مخروطوں کے جانی رقبوں کا کل جمع ہے۔
اس کو ہم کہہ سکتے ہیں $\sum_{i=1}^n \pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ (۳۰)

ثالثاً۔ پہلے مجموعہ پر اساسی مسئلہ کے اطلاق سے (حدود م = ۱ اور م = ۲)
استعمال کے ہیں حاصل ہوا ہے

نہا $\sum_{i=1}^n \pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ (۱) $\{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ فرلا
(۲) کے دوسرے مجموعہ کی انتہا جبکہ $n \rightarrow \infty$ صفر ہے * پس قوس ج و د کو
م لا کے گرد گھمانے سے جو گردش سطح کا رقبہ (س) پیدا ہوتا ہے

* اس لیے کہ اگر اس دوسرے مجموعہ کو ج سے تعبیر کیا جائے اور مثبت اعداد صم صم میں صم کو سب سے بڑے
حد کے سادی فرض کیا جائے تو $\sum_{i=1}^n \pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ بائیں جانب کا کل میں شک
رہے ج م م و وغیرہ وزن کے مجموعہ کے سادی ہے۔ فرض کو کہ یہ مجموعہ ل ہے
جب ج $\sum_{i=1}^n \pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ چونکہ نہا $\sum_{i=1}^n \pi_2 (م - صم) \{ + ف (لا) \} \overset{\sim}{=} \overset{\sim}{\pi_2} لا =$ جی ایک منسوب ہے اور اس لیے نہا جی = ۰

اس کا ضابطہ حسب ذیل ہے :-

$$\text{مس} = \int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فر}^2 \dots \dots \dots \text{اک} \quad (ک)$$

جس میں ما اور فر با گھومے ہوئے منحنی کی مساوات سے لاکھ رقوموں میں تعویض کیے جانے چاہئیں۔

یا ہم اس ضابطہ کو بصورت مس = $\int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فر}^2 \dots \dots \dots (ل)$ لکھ سکتے ہیں جس میں فرس = (فر^۱ + فر^۲) = $\int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فر}^2$ از روئے ضابطہ (د) — باب (۸) —

اسی طرح اگر گردش محور م ما ہو تو ضابطہ ذیل استعمال کرنا ہوگا :

$$\text{مس} = \int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فر}^2$$

جس میں منحنی کی مساوات سے لا اور فر^۱ کی قیمتیں ماکھ رقوموں میں درج کرنی ہوں گی۔

توضیحی مثالیں (۱) خط ناقص (لا = جم ذہ، ما = جب ذہ) کے محور لا کے گرد گھومنے سے جو گردش ناقص نساجم پیدا ہوتا ہے اس کی سطح کا قصبہ دریافت کرو۔

حل — فرلا = (جب ذہ فر ذہ، فرما = ب جم ذہ فر ذہ
اور فرس = (فرلا + فرما) = (ب جم ذہ + ب جم ذہ) = ب جم ذہ
پس جزو رقبہ = لا ما فرس = ب (ب جم ذہ + ب جم ذہ) = ب جم ذہ
 $\frac{1}{2} \text{مس} = \int_0^1 \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فر}^2}{\text{فر}^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فر}^2$
اس کو تکمیل کرنے کے لیے فرض کرو د = جم ذہ تب فرس = ب جم ذہ فر ذہ مہذا

اُجیبہ فہ + بیاجم فہ = وُ (۱-جم فہ) + بیاجم فہ = وُ - (وُ - بی) فہ
پس نئے حدود استعمال کر کے اور کے حدود میں باہمی تبادلہ کرنے سے

$$\frac{1}{4} \text{ م } = \pi^2 \text{ ب } \int \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\} \frac{1}{2} \text{ فرد } (1 < \text{ب})$$

$$= \pi^2 \text{ ب } \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \text{ فرد } = \pi^2 \text{ ب } \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \text{ فرد}$$

جس میں خہ = خروج المرکز ما (وُ - بی)

اس تکمیل کو معیاری صورت (۱۹) باب (۱۱) کے طریقہ پر حل کرنے سے

مں کی قیمت $\pi^2 \text{ ب } + \frac{\pi^2}{\text{خہ}} \text{ جب } \text{ا} \text{ خہ}$

مثال (۲) سخی مں = وُ (۱+جم ط) ابتدائی خط کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

$$\text{حل۔ مں} = \pi^2 \int \text{ا} \text{ فرد} = \pi^2 \int \text{س جب ط} \frac{\text{فرد}}{\text{فرد}}$$

$$= \pi^2 \int \left(\frac{1}{2} + \text{جم ط} \right) \text{ جب ط } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \text{جم ط} \right) \frac{1}{2} \text{ فرد}$$

$$= \pi^2 \int \left(\frac{1}{2} + \text{جم ط} \right) \text{ جب ط } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \text{جم ط} \right) \frac{1}{2} \text{ فرد} = \pi^2 \int \left(\frac{1}{2} + \text{جم ط} \right) \frac{1}{2} \text{ فرد}$$

$$= \pi^2 \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2} \text{ فرد} = \pi^2 \int \frac{1}{2} \text{ فرد}$$

مشالیں

(۱) درتدویر (hypocycloid) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور لا کے گرد

گھومنے سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ [جواب $\frac{\pi^2}{2}$]

(۲) کبھی مکافی $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کی قوس محرم لا کے گرد مابین لا = اور لا =

گھائی جاتی ہے۔ اس سے جو گردشیں سطح پیدا ہوتی ہے بتاؤ کہ اس کا رقبہ

$$\frac{\pi}{24} (10, 10, 1) - 1 \text{ ہے۔}$$

(۳) مکانی ما' = ۲ لاکھ توں کے محور م لا کے گرد گھومنے سے
جو سطح بنتی ہے اس کا رقبہ مابین حدود لا = ۰ اور لا = ۲ ف دریافت کرو۔

$$[\text{جواب} = \frac{\pi \cdot 2}{3} \text{ ف}]$$

(۴) خط ناقص لا' + ما' = ا کے محور م ما کے گرد گھومنے سے

جو گردشیں سطح بنتی ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔ خروج مرکز = خ = لا' + ما'

$$[\text{جواب} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ ف}]$$

(۵) ثابت کرو کہ زنجیرہ ا = ۱ (و' + و'') کے محور م لا کے گرد گھومنے

سے پیدا ہونے والی سطح کا رقبہ لا = ۰ سے لا = ۱ تک $\frac{\pi}{2} (و' + و'')$ ہے۔
اور اگر یہ منحنی محور م ما کے گرد گھومے تو انہی حدود کے اندر رقبہ $\frac{\pi}{2} (و' - و'')$ ہے۔

۳۔ معلوم متوازی عمودی تراشوں والے

اجسام کے حجم۔ قبل ازیں م میں ہم نے گردشیں جسم کے حجم کی تعیین سے
متعلق بحث کی ہے۔ اور بتایا ہے کہ محور لا کے گرد دیے ہوئے منحنی سے محدود رقبہ

محور لا محدود لا = ۱ اور لا = ۰ کی گردش سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اس کا ضابطہ

$$\text{حلا} = \frac{\pi}{2} \text{ ف} \text{ فرلا ہے جس میں ما کی قیمت لاکھ رقموں میں دیے}$$

ہوئے منحنی کی مساوات سے درج کی جانی چاہیے۔

اب ہم ایسے مجسمات کے جموں کی تعیین سے بحث کرنا چاہتے ہیں

جو گردشیں نہیں ہیں لیکن جن کی مستوی تراش کسی ثابت خط مثلاً محور لا کے

علی القوام کسی ثابت نقطہ مثلاً م سے اس کے فاصلہ لا کا تفاضل

لکھی جاسکتی ہے۔

ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یہ حجم

(ن) $ح = ک ف (لا) فرلا$ ہے.....
ذیل کی توضیحی مثالوں سے یہ بات باسانی ذہن نشین ہو جائیگی۔

توضیحی مثال (۱) محور والے ایک دائرہ کے قطر پر سے ایک

مربع کا مرکز حرکت کرتا ہے۔ مربع کا مستوی اس قطر کے علی القوائم رہتا ہے اور اس کی مقدار اس طرح بدلتی ہے کہ اس کے یعنی مربع کے متقابل کئے راس دیے ہوئے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتے ہیں تو بتاؤ کہ اس حرکت سے پیدا ہونے والے مجسم کا حجم $= \frac{۲}{۳} ر^۳$

حل۔ شکل نمبر ۱ کی تراسیم ملاحظہ ہو۔ ف ک ق ل مربع کی ایک وضع ہے۔ سرے ک ل دائرہ کے محیط پر حرکت کرتے ہیں۔ مربع کا مرکز قطر ا م پر جہاں کہیں ہوگا مربع کے ہندسی خواص سے ظاہر ہے کہ ن ک = ن ل = ن ف = ن ق سب ما کے مساوی ہوں گے۔ اس لیے کہ اس کے متقاطع قطر مساوی ہوتے ہیں۔

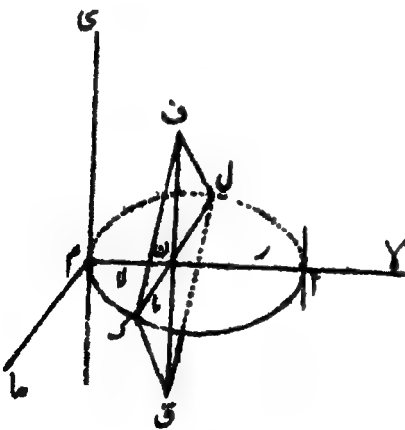
دائرہ کی مساوات چونکہ لا + ما = ر ہے
جبکہ مبداء مرکز سے منطبق ہوتا ہے
شکل نمبر ۱ میں م کو مبداء و تفسار
دینے پر مساوات

$$ما = ۲ لار - لا^۲ \text{ ہوگی۔}$$

$$\text{مربع کا رقبہ} = ۲ ما$$

$$\text{یعنی} = ۲ (۲ لار - لا^۲)$$

اگر فرلا موٹائی کے ایک مجسم جزو کا



شکل نمبر ۱

$$\text{حجم} = ۲ (۲ لار - لا^۲) \text{ فرلا}$$

$$\therefore \text{مکمل جسم کا حجم} = ۲ \int (۲ لار - لا^۲) \text{ فرلا}$$

$$\frac{۲۸}{۳} = ۲ \left[\frac{۲ لار}{۳} \right] - \left[\frac{۲ لار^۲}{۲} \right]$$

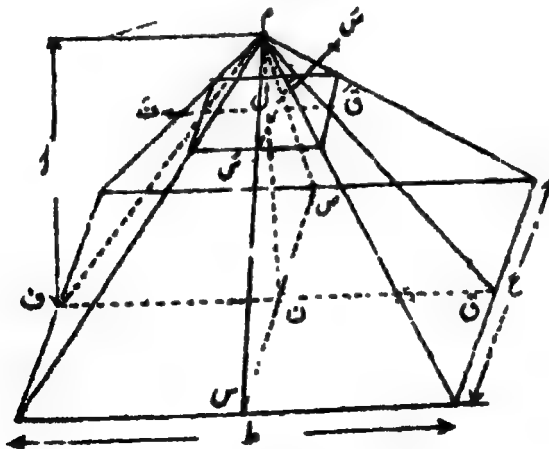
توضیحی مثال (۲) ایک قائم ہرم جس کا قاعدہ مستطیل ہے۔ حسب ذیل

ابعاد رکھتا ہے۔ طول = ط عرض = ع اور ارتفاع = ل اس کا حجم دریافت کیا جائے۔

حل۔ ارتفاع م ن کے علی التوائم اور اس لیے قاعدہ ف س ق ص کے متوازی ایک تراش ف س ق ص کیجیو۔

اگر ف ق = لا اور س ص = ما تو تراش کا رقبہ = لا ما اور اگر تراش کا عمودی فاصلہ م سے ی مانا جائے تو ہرم کا حجم

$$ح = \int لا ما فری \quad [\text{دیکھو شکل ۸۱}]$$



شکل ۸۱

ہرم کے ہندسے واضح ہے کہ مثلث م ف ق اور مثلث م ق ق

بہودھوال باب

مختلف طریقوں سے باضابطہ تکمیل

۱۔ باضابطہ مکمل بہ صورت میں بالآخر مکملوں کی جدول کے استعمال ہی پر منحصر ہے۔ اگر کبھی ایسے تکملہ سے سابقہ پڑتا ہے جو جدول کے کسی ضابطہ کے مشابہ نہیں نظر آتا تو اکثر اوقات یہ ہو سکتا ہے کہ اس تکملہ کو ایسی شکل میں تبدیل کیا جائے کہ وہ جدول کے کسی ضابطہ کے اطلاق کے قابل ہو جائے۔ اس عمل کے حسب ذیل طریقے ہیں :-

(۱) تکمیل بالتحصص جس کا گذشتہ باب میں ذکر آچکا ہے۔
(ب) منطق کسروں کے نظریہ کا اطلاق۔

(ج) مناسب ابدالوں کا استعمال۔

پہلے ہم منطق کسروں کے طریقہ پر بحث کریں گے۔

۲۔ منطق کسروں سے مراد ایسی کسر ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح منطق تفاعل ہیں۔ یعنی متغیر کے قوت نما منفی یا کسری نہیں ہیں۔ اگر کسیر کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کر کے کسیر کو ایک مخلوط (mixed) مقدار میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً

$$\frac{5 + 114}{3 + 112} = \frac{1 + 114}{3 + 112} = 1 + \frac{111}{3 + 112}$$

آخری رقم ایک خالص کسر ہے جس کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نامہ کے درجہ سے کمتر ہے۔ اس کا مکملہ معلوم کرنے کے لیے اس کو اس کے جزوی کسور میں تقویٰ کرنا پڑتا ہے جن کے متعلق اس کتاب کے حصہ اول باب دوم میں لکھا جا چکا ہے۔ یہاں ہم جزوی کسور کی دوسرے چند معمولی کسروں کے مکمل کے طریقے بیان کریں گے۔

صورت اول۔ جبکہ نسب نامہ کے مقام اجزاء ضربی پہلے درجہ کے ہوں اور ان میں سے کوئی دھرا یا نہیں لیا ہے۔

ہر خطی جزو ضربی کے لیے جو دھرا یا نہیں جاتا ہے (مثلاً ۱ + ۲ + ۳) ایک جزوی کسر ہوتی ہے جس کی عام صورت $\frac{۱}{۱+۲+۳}$ ہے۔ اس میں ۱ اور ۲ مستقل ہیں۔

توضیحی مثال۔ $\int \frac{۱+۲+۳}{۴+۵+۶}$ فرما کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ نسب نامہ کے اجزاء ضربی (۱-۲) (۲+۳) اور (۳-۴) ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{۱+۲+۳}{(۱-۲)(۲+۳)(۳-۴)} = \frac{۱}{۱-۲} + \frac{۲}{۲+۳} + \frac{۳}{۳-۴}$$

ہمیں مستقل تقادیر ۱ اور ۲ اور ۳ کی دریافت مقصود ہے۔

مسامات کو کسروں سے پاک کرنے سے

$$۱+۲+۳ = ۱(۲+۳)(۳-۴) + ۲(۱-۲)(۳-۴) + ۳(۱-۲)(۲+۳)$$

$$= (۲+۳+۱۲) - ۲(۲+۳) + ۳(۱-۲)(۲+۳) = (۱۲+۲+۳) - ۲(۲+۳) + ۳(۱-۲)(۲+۳)$$

غیر معین کسروں کے طریقہ پر مسامات کی دونوں جانبوں کے لاکھیاں مائل قوتوں کے سروں کو مساوی سمجھنے سے

$$۱۲+۲+۳ = ۲(۲+۳) + ۳(۱-۲)(۲+۳) = ۱۲+۲+۳ = ۱۲+۲+۳$$

ان ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے $\frac{5}{4} = \frac{1}{4} \text{ ب} = \frac{1}{4} \text{ اور ج} = \frac{31}{4}$ حاصل ہوتے ہیں۔

[نوٹ : بجائے ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے کے اس صورت میں ہم ایک آسان طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۱) لاکھ مقام قیمتوں کے لیے صحیح ہے ' لا = ۱ لکھو تب ب اور ج کٹ کر ۱ کی قیمت $\frac{5}{4}$ برآمد ہوگی۔ اس کے بعد لا = ۲ لکھو تب کی قیمت - $\frac{1}{4}$ برآمد ہوگی اور پھر لا = $\frac{1}{4}$ لکھو تب ج کی قیمت - $\frac{31}{4}$ حاصل ہوگی]

$$\text{پس } \int \frac{(لا^۳ + لا + ۱) فرلا}{(۲-۷۳)(۲+لا)(۱-لا)} = \int \frac{\frac{5}{4}}{۱-لا} + \int \frac{\frac{1}{4}}{۲+لا} + \int \frac{\frac{31}{4}}{۲-۷۳} فرلا$$

$$= \frac{5}{4} \text{ لوک } (۱-لا) - \frac{1}{4} \text{ لوک } (۲+لا) - \frac{31}{4} \text{ لوک } (۲-۷۳) + ج$$

صورت دوم۔ جبکہ نسب نامہ کے تمام اجزاء ضربی پہلے درجہ کے ہیں اور بعض ان میں سے دھرائے گئے ہیں۔ ہر ن گئے خطی جزو ضربی مثلاً (۱+لا+ب) کے لیے ن جزوی کسور کا مجموعہ لینا ہوتا ہے۔

$$\frac{۱}{(۱+لا+ب)} + \frac{ب}{(۱+لا+ب)} + \frac{لا}{(۱+لا+ب)} + \dots + \frac{ل}{(۱+لا+ب)}$$

$$\text{مثلاً } \int \frac{۱ فرلا}{(۱+لا+ب)} = \frac{۱}{(۱-۱) (۱+لا+ب)} + ج$$

توضیحی مثال۔ $\int \frac{لا^۲+۱}{۲(۱-لا)} فرلا$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ نسب نامہ میں جزو ضربی (۱-لا) تین مرتبہ آیا ہے اس لیے ہم

$$\frac{لا^۲+۱}{۲(۱-لا)} = \frac{۱}{۲(۱-لا)} + \frac{ب}{۲(۱-لا)} + \frac{ج}{۲(۱-لا)} + \frac{د}{(۱-لا)} \text{ فرض کرتے ہیں۔}$$

مساوات کو کسروں سے پاک کرنے پر

$$لا^۲+۱ = ۱(۱-لا) + ۲ب(۱-لا) + ۲ج(۱-لا) + د(۱-لا)$$

$$\text{حل۔} \frac{\text{ب} + \text{لا} + \text{ج}}{۳ + ۷۲ - ۲۷} + \frac{۱}{۲ + ۷} = \frac{۱}{(۴ + ۷۲ - ۲۷)(۲ + ۷)}$$

$$\therefore ۱ = (۲ + ۷)(\text{ب} + \text{لا} + \text{ج}) + (۴ + ۷۲ - ۲۷) \cdot ۱$$

$$= ۱۲ + ۷۲ - ۲۷ + ۲\text{ب} + ۷\text{لا} + ۳\text{ج} + ۲ + ۷$$

$$۱ = ۷۲ + ۲۲ + (۳ + ۷)\text{لا} + (۲ + ۷)\text{ج}$$

$$\text{پس } ۱ = \frac{۱}{۱۲} \text{ 'ب' } = -\frac{۱}{۱۲} \text{ اور } \frac{۱}{۱۲} \text{ ج}$$

$$\text{مثلاً } \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲} \int \frac{۷۲ - ۲۷}{۴ + ۷۲ - ۲۷} \text{ فرلا}$$

$$= \frac{۷۲(۷۲ - ۲۷)}{۴ + ۷۲ - ۲۷} \int \frac{۱}{۱۲} + (۲ + ۷) \text{ لوک}$$

$$\text{چونکہ } ۷۲ - ۲۷ = ۴۵ = ۳ + ۲(۱ - ۷) = ۳ + ۲\text{اگر } (۱ - ۷)$$

$$\therefore ۷۲ - ۲۷ = ۴۵ \text{ اور } ۷۲ - ۲۷ = ۴۵ \text{ اور } \frac{۱}{۱۲} \int \frac{۷۲ - ۲۷}{۴ + ۷۲ - ۲۷} \text{ فرلا}$$

$$= \left[\frac{۱}{۱۲} \text{ مس } \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۳ + ۲\text{ا}) \right]$$

$$= \left[\frac{۱}{۱۲} \text{ مس } \frac{۱ - ۷}{۳} - \frac{۱}{۳} \text{ لوک } (۴ + ۷۲ - ۲۷) \right]$$

$$\text{اور پورا کئے۔} \frac{۱}{۱۲} = \left\{ \frac{۱ - ۷}{۳} \text{ مس } \frac{۱}{۳} + (۲ + ۷) \text{ لوک } \frac{۱}{۳} - (۲ + ۷) \text{ لوک} \right\} \frac{۱}{۱۲} + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{۱۲} \text{ لوک } \frac{۲(۲ + ۷)}{۴ + ۷۲ - ۲۷} + \frac{۱ - ۷}{۳} \text{ مس } \frac{۱}{۳} + \text{ج}$$

صورت چہارم۔ جبکہ نسب نامہ میں دوسرے درجہ کے

اجزاء ضربی شامل ہیں اور ان میں سے چند دہل گئے ہوں گے۔

ہر ن گئے دوسرے درجہ کے جزو ضربی مثلاً (۱۲ + ۷ + ۳) کے لیے مندرجہ ذیل ن جزوی کسور کا مجموعہ لینا ہوگا۔

دوسری رقم کی تصیین کے لیے مصرعہ بالا تحریر علی ضابطہ راست استعمال کیا جاسکتا ہے۔ لیکن مکمل باخصص کے طریقہ سے اس کی تصیین نہ صرف آسان ہے بلکہ سود مند بھی اس لیے ہم

$$\text{فرض کرتے ہیں کہ } \frac{1}{2+u+v} = \text{اور فرد} = \text{فرلا} = \frac{(1+u+v)}{2(2+u+v)} \text{ فرلا}$$

$$\text{اور } 2 = u + v + 2$$

پس چونکہ $2 = 2 - 0$ کہ 2 فرد
 \therefore کہ $\frac{\text{فرلا}}{2+u+v} = \frac{2+u}{2+u+v} \times \frac{2}{2+u+v} = \frac{\text{فرلا}}{2(2+u+v)} \times \frac{2}{2+u+v}$
 اب اگر $\frac{1}{2} =$ لکھیں اور آخر لفظ کر تکملہ کے شمار کنندہ میں $\frac{4}{2}$ اضافہ کریں اور گٹھائیں تو

$$\frac{\text{فرلا}}{2+u+v} = \frac{2+u}{2+u+v} \times \frac{2}{2+u+v} = \frac{\text{فرلا}}{2(2+u+v)} \times \frac{2}{2+u+v}$$

$$\text{پس کہ } \frac{\text{فرلا}}{2(2+u+v)} = \frac{2}{2+u+v} \times \frac{1}{2} + \frac{u}{2+u+v} \times \frac{1}{2}$$

اس تکملہ کو مسادات (۱) میں تعویض کرنے سے

$$\frac{(1+u+v)}{2(2+u+v)} \times \frac{2}{2+u+v} - \frac{(2+u+v)}{2(2+u+v)} \times \frac{2}{2+u+v} = \frac{1+u+v}{2(2+u+v)} \times \frac{2}{2+u+v}$$

$$= \frac{2}{2(2+u+v)} - \frac{(2+u+v)}{2(2+u+v)} \times \frac{2}{2+u+v} = \frac{2}{2(2+u+v)} - \frac{(2+u+v)}{(2+u+v)^2}$$

مثالیں

ذیل کے تکنوں کی تصدیق کرو:-

$$(۱) \int \frac{(۷-۳) فرلا}{(۱+لا)^۲} = -\frac{۳}{لا} + ۴ لوک \frac{۱+لا}{لا} + ج$$

$$(۲) \int \frac{۱+۷۲+لا^۲}{(۱+۷۲+لا)^۲} فرلا = لوک (لا+۷) - \frac{۱}{۱+۷} + ج$$

$$(۳) \int \frac{۱+۷۲-۲۷۲-۲۷۲}{(۱+۷۲-۲۷)^۲} فرلا = لوک (۱-۷) + \frac{۱}{(۱-۷)} + ج$$

$$(۴) \int \frac{فرلا}{(۲-لا)^۲ (۱-لا)} = لوک \frac{۴}{۳} - \frac{۱}{۴}$$

$$(۵) \int \frac{۳+لا+لا^۲}{(۱+لا)^۲} فرلا = لوک (۱+لا) + \frac{۱+لا}{(۱+لا)^۲} + \frac{۳}{۴} مس لا + ج$$

۳۔ مندرجہ بالا بحث اور مثالوں سے ظاہر ہے کہ ہر منطبق تغا

کا (جو کہ ہمیشہ ایک منطبق کسر کی شکل میں تحول کیا جاسکتا ہے) اور جس کا نسب نما حقیقی دو درجی اور خطی اجزاء ضربی میں جدا کر لیا جاسکتا ہے ہر تکملہ دریافت ہو سکتا ہے۔ اور وہ سادہ ابتدائی تغا علوں مثلاً جبری، لوکارچی اور متلوب مثلثی تغا علوں کی رتبوں میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
ذیل میں چند مزید مثالیں مشق کی خاطر دی جاتی ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ ان کو حل کر لے۔

مزید مثالیں

محبت کرو کہ :-

$$(۱) \int \frac{لا^۲-۲+لا}{(۱+لا)^۲ (۲+لا)} فرلا = لا - \frac{۲۲}{۲+لا} - \frac{۶}{۱+لا}$$

$$+ ۱۳ لوک (لا+۲) - ۱۹ لوک (لا+۱) + ج$$

$$(۲) \int \frac{لا فرلا}{(۱+لا)(۱+۷)} = \frac{۱}{۱۰} لوک \frac{۱+لا}{(۱+۷)} + \frac{۲}{۵} مس لا + ج$$

$$(۳) \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) + C$$

$$(۴) \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C$$

$$(۵) \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$(۶) \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$(۷) \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

۳۔ نئے متغیر کی تعویض کے ذریعے مکمل۔

منطق بنانا۔ گذشتہ فصل میں بیان کیا گیا تھا کہ تمام ایسے منطق تفاعل کے یکجہ دریافت ہو سکتے ہیں جن کے نسب مناسبتی دو درجی اور خطی اجزاء ضربی میں ڈھالے جاسکتے ہیں۔ جو جبری تفاعل غیر منطق ہیں ان میں سے صرف چند کو ابتدائی اور سادہ تفاعل کی رقموں میں مکمل کیا جاسکتا ہے۔ ایک نئے متغیر کی تعویض سے بعض صورتوں میں ان تفاعل کو ایسے معادل (equivalent) تفاعل میں بدل دیا جاسکتا ہے جو سبب سے صورتوں کی فہرست میں داخل ہیں یا ان کو منطق بنا دیا جاتا ہے۔ غیر منطق تفاعل کو نئے متغیر کے ذریعے منطق بنا کر مکمل کرنے سے عمل کو منطق بنا کر مکمل کرنا کہتے ہیں۔ یہاں اس کی چند اہم مثالیں پیش کی جاتی ہیں۔

(۱) تفرقہ جن میں صرف لاکھ کسری قوتیں شامل ہیں۔

ایسے جملے کو بذریعہ تعویض لا = تی منطقی بنایا جاسکتا ہے جس میں ن لا کے کسری قوت نمائوں کا اقل مشترک نسب مہا ہے۔ اس لیے کہ اب لا فرلا اور جملہ اسیلے کی رقبوں میں منطقی شکل میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

توضیحی مثال - $\int \frac{فرلا}{لا^2 - لا^2} کی قیمت دریافت کرو۔$

حل - چونکہ یہاں لا کے کسری قوت نمائوں کا اقل مشترک نسب مہا ہے اس لیے

$$لا = ی^۱ لکھو تب فرلا = ی^۸ فری^۱ لا^۲ = ی^۱ اور لا^۱ = ی$$

$$اور دیا ہوا تکرار = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱}$$

$$= \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱}$$

$$= \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱}$$

$$\text{فرض کرو } \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱}$$

سادات کو کسروں سے پاک کر کے ترتیب دینے کے بعد ی کی مشابہ قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$$۱ + ج + د = ۰، ب + ج - د = ۱، ۱ + ج + د = ۰ اور ب + ج - د = ۰$$

$$\text{ان کو حل کرنے سے } ۱ = ۰، ب = \frac{۱}{۲}، ج = \frac{۱}{۲}، د = -\frac{۱}{۲}$$

$$\text{پس } \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱} = \int \frac{ی^۸ فری^۱}{ی^۱ - ی^۱}$$

$$= ۲ \text{ مست } ۱ + ۲ \text{ لکھ } (۱ - ی) - ۲ \text{ لکھ } (۱ + ی) + ج$$

$$= ۲ \text{ مست } ۱ + ۲ \text{ لکھ } (۱ - ی) - ۲ \text{ لکھ } (۱ + ی) + ج$$

$$\text{اور جواب} = \frac{1}{2} \text{ لا}^2 + 2 \text{ مس}^2 \text{ لا} + \frac{1}{2} \text{ لا}^2 + \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ لا}^2$$

واضح ہو کہ اوپر جو بحث کی گئی ہے ایسے غیر منطق جملوں سے کی گئی ہے جن کی عام شکل (لا^2) فرلا ہے۔ یہاں سے مراد لا^2 کا منطق تفاعل ہے۔

(ب) تفریق جن میں صرف $\text{لا} + \text{ب}$ لا کی کسری قوتیں

مشمول ہیں۔ ایسے جملہ کو بذریعہ تعویض $\text{لا} + \text{ب} = \text{ی}$ منطق شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے جہاں ن جملہ $\text{لا} + \text{ب}$ لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ہے۔ اس لیے کہ اب لا فرلا اور جملہ اصلییے ی کی قوتوں میں منطق شکل میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

$$\text{توضیحی مثال} - \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} + \text{ب})^{\frac{1}{2}} + (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{1}{2}}} \text{ حل} - \text{چونکہ یہاں } (\text{لا} + \text{ب}) \text{ کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما } 2 \text{ ہے اس لیے } (\text{لا} + \text{ب}) = \text{ی}^2 \text{ لکھو}$$

$$\text{تب } (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{1}{2}} = \text{ی}^{\frac{1}{2}} \text{ اور } (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{1}{2}} = \text{ی}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{اور ب فرلا} = 2 \text{ ی فری} \therefore \text{فرلا} = \frac{2 \text{ ی فری}}{\text{ب}}$$

$$\text{پس دیا ہوا مکملہ} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{ی فری}}{(\text{ی}^2 + 1)} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \text{ ی فری}}{\text{ی}^2 + 1} = \frac{2}{2} \text{ مس}^2 \text{ ی} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ مس}^2 (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$$

جس تکملہ سے یہاں بحث کی گئی ہے اس کی عام صورت $[\text{لا} (\text{لا} + \text{ب})^{\frac{1}{2}}] \text{ فرلا}$ ہے جس میں سے مراد منطق تفاعل ہے۔

مثالیں

ثابت کرو کہ :-

$$(۱) \int \frac{فرلا}{۵ + \sqrt{۱} ۲ + ۱} = \text{لوگ} (۵ + \sqrt{۱} ۲ + ۱) \text{ مس } \frac{۱}{۲} + \frac{۱ + \sqrt{۱}}{۲} ج$$

$$(۲) \int \frac{۲ فرلا}{۱ + \sqrt{۱} (۲ + ۱)} = \frac{۱}{۲} \text{ لوگ} \frac{۱ - \sqrt{۱ + ۱}}{۱ + \sqrt{۱ + ۱}} \text{ مس } \frac{۱}{۳} + \frac{۱ + \sqrt{۱}}{۳} ج$$

$$(۳) \int \frac{فرلا}{۱ + \sqrt{۱} ۳ + ۱} = \frac{۲}{۳} (۱ + \sqrt{۱}) - \frac{۲}{۳} (۱ + \sqrt{۱}) ۳ + \text{لوگ} (۱ + \sqrt{۱} ۳ + ۱) ج$$

$$(۴) \int \frac{فرلا}{۱۱ (۳ + ۹)} = (۱ - ۳ \text{ مس } \frac{۱}{۳})$$

$$(۵) \int \frac{فرلا}{۴ (۱ + \sqrt{۱}) (۲ + ۱)} = \frac{(۱ - \sqrt{۱}) ۲}{۳} - \frac{\pi}{۴}$$

۷۔ دو رقتی یا ثنائی تفرقے۔

(۱) لا (۱ + ب لا) ث فرلا کی شکل کا تفرقہ جس میں ۱ اور ب کوئی مستقل ہیں اور قوت نام 'ن' ف منطق اعداد ہیں دو رقتی تفرقہ کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ لا = ی تب فرلا = ع ی ۱ فری

اور لا (۱ + ب لا) ث فرلا = ع ی ۱ + ع ۱ - ع (۱ + ب ی ۱) فری

اگر ع نسب نائوں م اور ن کا ذواضاف اقل لیا جائے تو م ع اور ن ع صحیح اعداد ہوں گے۔

پس واضح ہے کہ دیا ہوا تفرقہ ایک دوسرے اسی شکل کے تفرقے کے مساوی ہے جس میں م اور ن کے بجائے صحیح اعداد درج ہیں۔ مہذا

(ب) لا (۱ + ب لا) ث فرلا = لا ۱ + لا ۱ (۱ + ب لا) ث فرلا

دیے ہوئے تفرقہ کو اسی شکل کے ایک دوسرے تفرقہ میں تبدیل

کر دیتا ہے جس میں لا کے قوت نما ن کے عوض - ن درج ہے۔
پس ن کی جبری علامت خواہ کچھ ہی ہو ان دو تفرقوں میں سے ایک
میں قوسوں کے اندر لا کا قوت نماییناً مثبت ہوگا۔

ف جبکہ ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے دورقی جملہ کو پھیلا کر اس کی
ایک رقم کا نکلہ حاصل کر لیا جاسکتا ہے ذیل میں ف کو سرمان کر اس کی بجائے
س لکھا جاتا ہے جہاں ر اور س دونوں صحیح اعداد ہیں۔

پس ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر دورقی یا ثنائی تفرقہ لا (ا + ب لا) ٹ فرلا
کی شکل میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس میں م ن ر اور س
صحیح عدد ہوں اور ن مثبت ہے۔

پہلے ہم دورقی تفرقہ لا (ا + ب لا) ٹ فرلا ... (۱)
کو منطق بنانے کے شرائط دریافت کر لینگے۔

صورت (۱) فرض کرو ا + ب لا = ی

تب (ا + ب لا) ٹ = ی اور (ا + ب لا) ٹ = ی

معینا لا = (ی - ا) / ب اور لا = (ی - ب) / ا

پس فرلا = پ / ی = (ی - ا) / ب - (ی - ب) / ا فری

(۱) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے :-

لا (ا + ب لا) ٹ فرلا = پ / ی = (ی - ا) / ب - (ی - ب) / ا - ۱

دافع ہے کہ اس جملہ کا دوسرا رکن منطق ہے جبکہ پ / ی ایک صحیح عدد ہے یا صفر

صورت (۲) فرض کرو $1 + ب ل = ی ل$

$$\frac{1}{ی - ب} = \frac{1}{ی - ب} \text{ اور } 1 + ب ل = ی ل = \frac{1}{ی - ب}$$

پس $(1 + ب ل) = ی ل = \frac{1}{ی - ب}$

اسی طرح $1 + ب ل = ی ل$ اور $1 = ی ل - ب ل = ل(ی - ب)$

∴ $فرلا = \frac{1}{ی - ب}$

(۱) میں ان کو تعویض کرنے سے

$$ل(1 + ب ل) = فرلا = \frac{1}{ی - ب}$$

$$(ی - ب) = \frac{1}{فرلا}$$

واضح ہے کہ اس جملہ کا دوسرا کمن منطق ہے جبکہ $\frac{1}{ن} + \frac{1}{س} = ایک$ صحیح عدد ہے یا صفر

پس دو رقی تفرقہ $ل(1 + ب ل) = فرلا$ کو ان شرائط کے تحت منطق بنایا جاسکتا ہے۔

توضیحی مثال (۱) $\int \frac{ل فرلا}{(۲ + ۵ ل)²}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ تکملہ $= \int ل(۲ + ۵ ل)² فرلا$ اور $م = ۲$ کن $۲ = ۱$ س $۲ = ۲$

پس اس مثال میں $\frac{۱ + م}{ن} = ۲$ جو ایک صحیح عدد ہے اس لیے یہ صورت (۱) کی مثال ہے۔

∴ ہم فرض کرتے ہیں کہ $ل(۲ + ۵ ل) = ی$

$$\text{اس لیے لا} = \frac{1}{3} \left(\frac{2 - 2y}{5} \right) \text{ فرلا} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{\frac{1}{3}(2 - 2y) + \frac{1}{3}(5)} \text{ اور } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (2 + 5) = \frac{1}{3} (7)$$

$$\therefore \int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{\frac{1}{3}(2 - 2y) + \frac{1}{3}(5)} = \int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{\frac{1}{3}(7 - 2y)} = \int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y}$$

$$= \int \frac{1}{3} \frac{1}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \log(7 - 2y) \right] + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2} \log(7 - 2y) \right] + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{2y + 1} \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل: تکملہ = $\int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y}$

جس میں م = $7 - 2y$ ، $2 = -\frac{1}{2} \frac{dm}{dy}$ ، $dy = -2 \frac{dm}{m}$

پس $\frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \int \frac{1}{m} = \frac{1}{6} \int \frac{1}{m} = \frac{1}{6} \log m = \frac{1}{6} \log(7 - 2y)$ لہذا یہ صورت (۲) کی مثال ہے۔

اس لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ $7 - 2y = 1$ ، $2y = 6$ ، $y = 3$ ، $\frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \frac{3 \text{ فری}}{1} = \text{فری}$

لہذا $\frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1}$

معبداً $\frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1}$

اور فرلا = $\frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1} = \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1}$

$\therefore \int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{7 - 2y} = \int \frac{1}{3} \frac{y \text{ فری}}{1} = \frac{1}{3} \int \frac{y \text{ فری}}{1} = \frac{1}{3} \int \frac{y \text{ فری}}{1}$

$$\frac{y^2 - y^3}{y^3} = \frac{1}{y} + (y - \frac{y^2}{3}) \frac{1}{y} =$$

$$ج + \frac{(1 - y^2) \frac{1}{3} (y + 1)}{y^3} =$$

مشائیں

مندرجہ ذیل تکراروں کی تصدیق کرو:۔

$$(1) \int (1 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + \frac{1}{2} \arcsin y + C$$

$$(2) \int (1 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dy = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} + C$$

$$(3) \int (1 + y^2)^{-\frac{5}{2}} dy = -\frac{y}{2(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4} \arcsin y + C$$

$$(4) \int (1 + y^2)^{-\frac{7}{2}} dy = -\frac{y}{4(1 + y^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{8} \arcsin y + C$$

$$(5) \int (1 + y^2)^{-\frac{9}{2}} dy = -\frac{y}{8(1 + y^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3}{16} \arcsin y + C$$

۱۔ مثلثی تفرقوں کا استعمال

مسئلہ۔ مثلثی تفرقہ جس میں جب و اور جم و صرف منطق صورت میں شامل ہیں۔ بذریعہ تعویض۔

$$(1) \text{ مس } \frac{y}{3} = \frac{y}{3}$$

یا بالفاظ دیگر بذریعہ تعویض۔

$$(۲) \text{ جب } r = \frac{y^2}{y+1} \text{ 'جم' } r = \frac{y-1}{y+1} \text{ 'فر' } = \frac{2 \text{ فری}}{y+1}$$

ایک دوسرے تفریق جملہ میں جو ی میں منطق ہے
تحویل کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{ثبوت۔ چونکہ مس } \frac{r}{p} = \frac{y-1}{y+1} \text{ 'جم' } r$$

$$\text{مس } \frac{r}{p} = y \text{ تو یض کر کے جم } y \text{ کے لیے حل کرنے سے}$$

$$(۳) \text{ جم } r = \frac{y-1}{y+1} \text{ جو ضابطوں (۲) میں سے ایک ضابطہ ہے۔}$$

شکل مسئلہ کے مثلث قائم الزاویہ سے اس کی توضیح ہوتی ہے اور نیز

$$\text{ضابطہ جب } r = \frac{y^2}{y+1} \text{ کی جو (۲) میں شامل ہے۔ مہذا ضابطہ (۱) سے}$$

$$r = 2 \text{ مس } y \text{ 'فر' } = \frac{2 \text{ فری}}{y+1} \text{ جو (۲) کا تیسرا}$$

ضابطہ ہے۔



شکل مسئلہ

واضح ہے کہ اگر کسی مثلثی تفرقہ
میں مس 'ر'، جم 'ر'، قطر 'ر'، قوس 'ر' صرف
منطق صورتوں میں شامل ہوں تو
مصرعہ بالا مسئلہ اس پر بھی حاوی
ہو سکتا ہے اس لیے کہ یہ پارتنال
منطق طریقہ پر جب 'ر' یا جم 'ر' یا ان
دونوں کی رقموں میں ظاہر کیے جاسکتے

ہیں۔
پس کوئی منطق مثلثی تفرقہ مکمل کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ 'ی' کی رقموں میں مستحیل
تفرقہ جزوی کسور میں جدا کیا جاسکتا ہے۔ (ملاحظہ ہو فصل ۱۱۔)

توضیحی مثال - ثابت کرو کہ

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\text{فرلا}}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ مس } \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) + \text{ج}$$

[نوٹ ۱ < ۲]

حل - فرض کرو $x^2 = 1$ تب $x = 1$ اور فرلا $x = 1$ فر

$$\text{اب ی} = \text{مس} \frac{x}{x^2 + 1} \text{ لکھو تب جب } x = 1 \text{ فری}$$

$$\text{اور دیا ہوا تکملہ} = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\frac{x}{x^2 + 1}}{\frac{x}{x^2 + 1} + 1} = \frac{\text{فری}}{\text{فری} + 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\text{فری}}{\left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) + \left(\frac{x}{x} + 1 \right)} = \frac{\text{فری}}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1} + \text{ج}$$

$$\text{ی کو لا کی رقموں میں واپس لانے سے جواب} = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ مس } \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \right) + \text{ج}$$

مثالیں

ثابت کرو :-

$$(1) \int \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\text{فرط}}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ مس } \frac{1}{x^2 + 1} + \text{ج}$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\text{مس لا فرلا}}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ مس } \frac{1}{x^2 + 1} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{x^2 + 1} + \text{ج}$$

$$(۳) \int \frac{1}{x^2} = \frac{فرقہ}{۳ + حجم} = \frac{1}{x^2} \text{ مس } \left(\frac{1}{x^2} \text{ مس } \frac{1}{x} \right) + ج$$

$$(۴) \int \frac{1}{x^2} = \frac{فرقہ}{۱ + حجم} = \frac{1}{x^2} \text{ مس } \left(\frac{1}{x^2} \text{ مس } \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \text{ مس } \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \text{ مس } \frac{1}{x} + ج \right)$$

$$(۵) \int \frac{1}{x^2} = \frac{فرقہ}{۱۲ + ۱۳ حجم} = \frac{1}{x^2} \text{ مس } \frac{1}{x} + ج$$

۷۔ متفرق تعویضیں۔ جو تعویضیں اب تک

پیش ہوئی تھیں ان سے دیے ہوئے تفرقی جلوں کو منطق بنا کر مکمل کیا گیا تھا۔ بہتری صورتوں میں دیے ہوئے تفرقہ کو منطق بنائے بغیر بھی بعض تعویضوں کے ذریعے مکمل کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس کا کوئی عام قاعدہ نہیں بتایا جاسکتا۔ متفرق قسم کے سوالات بکثرت حل کرنے کے بعد طالب علم کو تجربہ بتا دیا کہ کن صورتوں میں کیا کرنا چاہیے۔

ایک مفید عام تعویض جو متکاتی تعویض کہلاتی ہے

$$لا = \frac{1}{ی} \text{ ہے جس سے } فرقا = - \frac{فری}{ی^2}$$

توضیحی مثال۔ $\int \frac{فرقہ}{۱۲ + ۱۳ فرقا + ۳ فرقا^2} =$ کا مکملہ معلوم کرو۔

حل۔ $ف = \frac{1}{ی}$ لکھو تب دیا ہوا مکملہ

$$= \int \frac{-فری}{ی^2 + \frac{۱۲}{ی} + \frac{۱۳}{ی^2}} = - \int \frac{فری}{(۳ + ۱۲ی + ۱۳ی^2)}$$

$$= - \int \frac{فری}{(۳ + ۱۲ی + ۱۳ی^2)} + \int \frac{فری}{(۳ + ۱۲ی + ۱۳ی^2)} =$$

$$= - \int \frac{فری}{(۳ + ۱۲ی + ۱۳ی^2)} + \int \frac{فری}{(۳ + ۱۲ی + ۱۳ی^2)} + ج$$

$$= - (y^2 + y + 2) + \{ (y+1) + [y^2 + y + 2] \} + j$$

دوبارہ ذ کی رتوں میں تبدیل کرنے سے

$$= - \frac{2 + y + y^2}{3} + \text{وک} \frac{(1+z) + (1+z+2+2z)}{z} + j$$

مشالیں

مندرجہ ذیل تکراروں کی تصدیق کرو :-

$$(1) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + j \left(\frac{\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2+2x}} \right)$$

[اشارہ : فرض کرو کہ $\sqrt{x^2-2x} = \sqrt{x^2+2x} (1+j)$]

$$(2) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + j \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} \right)$$

[اشارہ : فرض کرو کہ $\frac{1}{j} = \sqrt{x^2-1}$]

$$(3) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + j \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} \right)$$

[اشارہ : فرض کرو کہ $\frac{1}{j} = \sqrt{x^2-1}$]

$$(4) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + j \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} \right)$$

[اشارہ : $\frac{1}{j} = \sqrt{x^2-1}$]

$$(5) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + j \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+1}} \right)$$

[اشارہ : $\frac{1}{j} = \sqrt{x^2-1}$]

پندرہواں باب

تحویلی ضابطے (Reduction Formulae)

تکملوں کی جدول کا استعمال

۱۔ دو درجی تفرقوں کے لیے تحویلی ضابطے۔

اب تک جو طریقے بتائے گئے ہیں ان سے اگر دو درجی تفرقوں کے تکملے جلد دریافت نہیں ہو سکتے تو تکملہ بالخصوص کے طریقے استعمال کر کے عام طور پر تحویلی ضابطوں سے کام لیا جاتا ہے۔ ان تحویلی ضابطوں سے دیا ہوا تفسیر دو درجوں کے حامل جمع کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے جن میں سے ایک رقم تکملہ کی علامت سے معترارہتی ہے اور دوسری رقم ابتدائی دیے ہوئے جملہ کی ہم صورت ہوتی ہے لیکن اس کا تکملہ آسان تر ہوتا ہے۔ اہم تحویلی ضابطے چار ہیں اور ذیل میں درج کیے جاتے ہیں:-

$$(۱) \int (a + b x) \sqrt{c + d x} \, dx = \frac{(a + b x) \sqrt{c + d x}}{d} - \frac{a \sqrt{c + d x}}{d}$$

$$- \frac{(a + b x) \sqrt{c + d x}}{d} + \frac{a \sqrt{c + d x}}{d}$$

$$(ب) \int (a + b x) \sqrt{c + d x} \, dx = \frac{(a + b x) \sqrt{c + d x}}{d} + \frac{a \sqrt{c + d x}}{d}$$

$$(ج) \quad \frac{لا (لا + بلا) ف فزلا}{لا (لا + بلا) ف فزلا} = \frac{لا (لا + بلا) ف فزلا}{لا (لا + بلا) ف فزلا}$$

$$- \frac{(ن + ف + م + لا) ف فزلا}{لا (لا + بلا) ف فزلا}$$

$$(د) \quad \frac{لا (لا + بلا) ف فزلا}{لا (لا + بلا) ف فزلا} = \frac{لا (لا + بلا) ف فزلا}{لا (لا + بلا) ف فزلا}$$

$$+ \frac{ن + ف + م + لا}{لا (لا + بلا) ف فزلا}$$

ان ضابطوں کو خط کرنے کی ضرورت نہیں لیکن یہ معلوم ہونا چاہیے کہ

ہر ضابطہ میں کیا کیا جاتا ہے اور وہ کب ناقابل عمل ہوتا ہے۔

ضابطہ (۱) م کو بقدر ن گھٹاتا ہے۔ یہ ضابطہ ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ $ن + ف + م + لا = ۰$

ضابطہ (ب) ف کو بقدر ا گھٹاتا ہے۔ یہ " " " " جبکہ $ن + ف + م + لا = ۰$

ضابطہ (ج) م کو بقدر ن بڑھاتا ہے۔ یہ " " " " جبکہ $م + لا = ۰$

ضابطہ (د) ف کو بقدر ا بڑھاتا ہے۔ یہ " " " " جبکہ $ن + ف = ۰$

[۱] ضابطہ (۱) اخذ کرنے کے لیے ہم مکمل بالخصوص کے ضابطہ

ا، فزو = د، کو فرو کو اس طرح استعمال کرتے ہیں۔

ا، فزو (لا + بلا) ف فزلا کو شکل ا، فزو ڈھانے اور فرو کو گیا ہو جس باب

کی معیاری صورت (۱) یعنی قوت کے ضابطہ سے مکمل کرنے کے لیے ظاہر ہے کہ

توسیع کے باہر کے لا کا قوت نماں - ا ہونا چاہیے پس د میں لا کے قوت نما

کے لیے م میں سے ن - ا تفریق کرنے پر م - ن + ا رہ جاتا ہے۔

$$\therefore د = لا - م = لا - (لا + بلا) ف فزلا = لا - (لا + بلا) ف فزلا$$

$$\text{ہذا فرق} = (م - ن + ۱) \text{ لا}^{\text{م}} \text{ اور } \frac{(۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}})}{ن ب (ف + ۱)}$$

تکمل بالخصوص کے ضابطہ میں ان کو تعویض کرنے سے

$$\frac{(۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ لا}^{\text{م}}}{ن ب (ف + ۱)} = \text{فرلا}$$

$$- \frac{م - ن + ۱}{ن ب (ف + ۱)} \text{ لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا} \dots (۱)$$

لیکن $\text{لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا} = \text{لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا}$

$$= ۱ \text{ لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا}$$

اس کو (۱) میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{(۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ لا}^{\text{م}}}{ن ب (ف + ۱)} = \text{فرلا}$$

$$- \frac{(م - ن + ۱) \text{ لا}^{\text{م}}}{ن ب (ف + ۱)} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا}$$

$$- \frac{م - ن + ۱}{ن ب (ف + ۱)} \text{ لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا}$$

سب سے آخری رقم کو مساوات کے سیدھے جانب منتقل کرنے اور

$\text{لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا}$ کے لیے مساوات کو حل کرنے سے ضابطہ (۱) حاصل ہوتا ہے۔

اس کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ ضابطہ (۱) دیے ہوئے تقریقی جملہ

$\text{لا}^{\text{م}} (۱ + ب \text{ لا}^{\text{ن}}) \text{ فرلا}$ کے تکمیل کو اسی وضع کے ایک دوسرے تقریقی جملہ

کے تکمیل کے تابع بنا دیتا ہے جس میں م کے بجائے م - ن وضع ہے۔

پس ضابطہ (۱) کے بار بار استعمال سے م کو بقدر ن کی کسی بھی ضعف

کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

جیکہ $ن + ف + م + ۱ =$ ضابطہ (۱) ناقابلِ عمل ہوتا ہے اس لیے کہ

نسب نامہ مفہوم ہو جاتا ہے۔ لیکن اس صورت میں

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 0$$

اس لیے چودھویں باب کی فصل ۱ کے طریقہ سے مکملہ آسانی دریافت ہو سکتا ہے۔ (۱) کی ضرورت نہیں ہوتی۔

[۲] ضابطہ (ب) اخذ کرنے کے لیے ہم تفرقی جملہ کے اجزاء ضربی کو علیحدہ کر کے لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^n &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \dots (۲)$$

اب اگر (۲) کی آخری رقم پر ضابطہ (۱) مانڈ کریں (یعنی اس ضابطہ میں بجائے م کے م + ن لکھیں اور بجائے ن کے م + ن لکھیں تو

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \dots$$

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \dots$$

اس کو (۲) میں تبویض کرنے سے ہمیں ضابطہ (ب) حاصل ہوتا ہے۔
ضابطہ (ب) کے ہر استعمال سے ف بقدر اکائی ٹکٹ جاتا ہے۔ یہ ضابطہ بھی اس صورت میں ناقابل عمل ہوتا جس میں (۲) ہوتا ہے

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 0$$

[۳] ضابطہ (ج) اخذ کرنے کے لیے ہم ضابطہ (۲) کو

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \dots$$

$$\frac{(ن + م + ۱)ب}{(م - ن + ۱)ا} - \frac{(۱ + ب)۱۰}{(م - ن + ۱)ا} = \frac{(ن + م + ۱)ب}{(م - ن + ۱)ا}$$

$$\frac{(۱ + ب)۱۰}{(م - ن + ۱)ا}$$

اس کے اندر م کی جگہ م + ن تعویض کرنے سے ضابطہ (ج) حاصل ہوتا ہے۔
پس ہر مرتبہ جبکہ ضابطہ (ج) استعمال ہوتا ہے م کے بجائے م + ن
لکھا جاتا ہے۔ جس وقت ن + ۱ صفر ہوتا ہے تو ضابطہ (ج) ناقابل عمل ہوتا
ہے لیکن اس صورت میں اس کی ضرورت نہیں ہوتی باب (۱۲) کی فصل ۱۱
کی مدد سے تفرقی جملہ کو منطق بنایا جاسکتا ہے۔

[۴] ضابطہ (د) اخذ کرنے کے لیے ہم ضابطہ (ب) کو
ف کی جگہ ف + ۱ تعویض کرتے ہیں۔

ہر مرتبہ جبکہ ضابطہ (د) استعمال ہوتا ہے ف کو بقدر اکائی بڑھا دیتا
ہے۔ ظاہر ہے کہ (د) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ ف + ۱ = ۰۔ لیکن
اس صورت میں چونکہ ف = ۱ - ۱ دیا ہوا تفرقی جملہ منطق ہے۔
ظاہر ہے کہ چودھویں باب کی فصل ۱۱ میں صورت چہارم کا تحویلی ضابطہ
(د) کی ایک خاص صورت ہے جس میں م = ۰، ف = -۱، ن = ۲،
ا = ۱، ب = ۱

توضیحی مثال (۱) $\frac{(۱ + ۲)۱۰}{(۱ + ۲)۱۰} = ۱$ فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

حل - اس تکرار کی تعیین کے لیے تحویلی ضابطہ (۱) موزوں ہے
کیونکہ اس کے استعمال سے تکرار $\frac{(۱ + ۲)۱۰}{(۱ + ۲)۱۰}$ فرلا کی تعیین کرنی ہوگی
جو سابقہ باب کی معیاری صورت (۱) متعلق ضابطہ قوت کے تحت آتا ہے۔

$$\frac{(۱ + ۲)۱۰}{(۱ + ۲)۱۰} = ۱$$

$$= \frac{1}{5} \lambda^2 (\lambda^2 + \lambda^2) - \frac{2}{15} \lambda^2 (\lambda^2 + \lambda^2) + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{15} \lambda^2 (\lambda^2 - \lambda^2) (\lambda^2 + \lambda^2) + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ

فرا $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2}$ فرلا $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2}$ کوک $(\lambda^2 + \lambda^2) + \text{ج}$
 حل - اس سوال کے حل کے لیے ضابطہ (ب) موزوں ہے اس لیے کہ
 فرا $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2}$ کی تعین معیاری صورت (۱۸) کے ضابطہ کے تحت آتی ہے پس

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} \text{ فرلا}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} \text{ کوک } (\lambda^2 + \lambda^2) + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۳) مکمل کرو -

حل - یہاں ضابطہ (ج) استعمال کرنا موزوں ہوگا کیونکہ اس سے

مکملہ $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2}$ کی تعین کرنی ہوگی جو معیاری صورت

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} \text{ ج میں شامل ہے۔}$$

$$\text{پس } \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2} \text{ ج}$$

توضیحی مثال (۴) $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda^2}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ ۲ والا - لا = لا^۲ - (لا - لا^۲) اور فلا = فر (لا - لا^۲)

ہم اس کو $\int \frac{فر (لا - لا^۲)}{\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}}$ لکھ سکتے ہیں۔ اس کے معانی سے ظاہر ہے کہ اس کا متکمل بذریعہ ضابطہ (د) سودمند ہوگا۔

پس تکملہ = $\frac{(لا - لا^۲)\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}}{لا} + \int \{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}} فر (لا - لا^۲)$

چونکہ (ن + ف + م + ا) = صفر اس لیے دوسری رقم کو تکملہ لانے کی ضرورت ہی نہیں پیش آتی۔

لہذا جواب = $\frac{لا - لا^۲}{\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}} + ج + \frac{لا - لا^۲}{لا^۲ - لا - لا^۲} + ج$

مثالیں

ذیل کے تکلوں کی تصدیق کرو:-

$$(۱) \int \frac{فر (لا - لا^۲)}{\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{لا (لا - لا^۲)}{\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}} - \frac{لا (لا - لا^۲)}{\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$- \frac{لا (لا - لا^۲)}{\{لا^۲ - (لا - لا^۲)\}^{\frac{۳}{۲}}} + ج$$

[اشارہ: پہلے ضابطہ (۱) استعمال کیا جائے پھر ضابطہ (ب) دو مرتبہ]

$$(۲) \int \frac{لا فر لا}{لا^۲ - لا - لا^۲} = - \frac{لا فر لا}{لا^۲ - لا - لا^۲} + ج$$

[اشارہ: متکمل یعنی $\int ف (لا) فر لا$ میں $ف (لا)$ کے شمار کنندہ اور

نسب نما دونوں کو لا^۲ پر تعمیم کرنے سے وہ $\frac{لا}{لا^۲ - لا - لا^۲}$ بن جاتا ہے اور یہی شکل میں ضابطہ (۱) کے ذریعہ آسانی تکمیل کیا جاسکتا ہے]

$$(۳) \int \frac{لا^۲ فر لا}{لا^۲ + لا + لا^۲} = \frac{لا^۲ فر لا}{لا^۲ + لا + لا^۲} - \frac{لا^۲ فر لا}{لا^۲ + لا + لا^۲} + ج$$

$$(۴) \int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{1+x} + C$$

$$+ \frac{1}{1+x} + C$$

$$(۵) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$(۶) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

[اشارہ ضابطہ (۱) دوسرے استعمال کیا جائے]

$$(۷) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$(۸) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$(۹) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$(۱۰) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right\} + C$$

۲۔ مثلثی تفرقوں کے لیے تحویلی ضابطے۔

سابقہ فصل کا طریقہ جس سے دیے ہوئے مسئلہ کا حل ایک دوسرے

اس کے مشابہ صورت کے تکرار کی تین کے تابع گردانا جاتا ہے متواتر تحویل کہلاتا ہے۔ یہی طریقہ اب مندرجہ ذیل مثلثی تحویلی ضابطوں کو اخذ کر کے اور ان کا استعمال بنا کر مثلثی تفرقوں پر عام کیا جاتا ہے۔

$$(ھ) \quad \left[\text{جب}^1 \text{لاجم}^1 \text{لا فرلا} \right] = \frac{\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 - 1}{م + ن}$$

$$+ \frac{1 - ن}{م + ن} \left[\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 \text{لا فرلا} \right]$$

$$(و) \quad \left[\text{جب}^1 \text{لاجم}^1 \text{لا فرلا} \right] = - \frac{\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 + 1}{م + ن}$$

$$+ \frac{1 - م}{م + ن} \left[\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 \text{لا فرلا} \right]$$

$$(ز) \quad \left[\text{جب}^1 \text{لاجم}^1 \text{لا فرلا} \right] = - \frac{\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 + 1}{1 + ن}$$

$$+ \frac{2 + ن + م}{1 + ن} \left[\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 \text{لا فرلا} \right]$$

$$(ح) \quad \left[\text{جب}^1 \text{لاجم}^1 \text{لا فرلا} \right] = \frac{\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 + 1}{1 + م}$$

$$+ \frac{2 + ن + م}{1 + م} \left[\text{جب}^2 \text{لاجم}^2 \text{لا فرلا} \right]$$

طالب علم کو چاہیے کہ ان ضابطوں سے متعلق یاد رکھے کہ:

- ضابطہ (ھ) میں ن کو بقدر ۲ گھٹا دیا جاتا ہے۔ (ھ) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ م + ن = ۰
 - ضابطہ (و) میں م کو بقدر ۲ گھٹا دیا جاتا ہے۔ (و) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ م + ن = ۰
 - ضابطہ (ز) میں ن کو بقدر ۲ بڑھا دیا جاتا ہے۔ (ز) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰
 - ضابطہ (ح) میں م کو بقدر ۲ بڑھا دیا جاتا ہے۔ (ح) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰
- ان ضابطوں کو اخذ کرنے کے لیے مشل سابق نمکمل بالخصوص کا

ضابطہ عائد کرتے ہیں یعنی

$$ک د فرو = د و - ک و فرو$$

فرض کرو $د = \text{جہم}^1 \text{ لا}$ اور $فرو = \text{جہا}^1 \text{ لاجم لا فرلا}$

تب $فرو = (ن-۱) \text{جہم}^2 \text{ لاجب لا فرلا}$ اور $د = \frac{\text{جہا}^1 \text{ لا}}{۱+م}$
مکمل باحصص کے ضابطہ میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے :-

$$\frac{\text{جہا}^1 \text{ لاجم}^1 \text{ لا}}{۱+م} = \text{جہا}^1 \text{ لاجم}^1 \text{ لا فرلا}$$

$$+ \frac{۱-ن}{۱+م} \text{جہا}^2 \text{ لاجم}^2 \text{ لا فرلا} \dots (۱)$$

اس طرح اگر فرض کیا جائے کہ $د = \text{جہا}^1 \text{ لا}$ اور $فرو = \text{جہم}^1 \text{ لاجب لا فرلا}$

$$\text{تو حاصل ہوتا ہے } \text{جہا}^1 \text{ لاجم}^1 \text{ لا فرلا} = \frac{\text{جہا}^1 \text{ لاجم}^1 \text{ لا}}{۱+ن}$$

$$+ \frac{۱-م}{۱+ن} \text{جہا}^2 \text{ لاجم}^2 \text{ لا فرلا} \dots (۲)$$

لیکن $\text{جہا}^2 \text{ لاجم}^2 \text{ لا فرلا} = \text{جہا}^1 \text{ لا} (۱-جہم^1 \text{ لا فرلا})$

$$= \text{جہا}^1 \text{ لاجم}^2 \text{ لا فرلا} - \text{جہا}^1 \text{ لاجم}^1 \text{ لا فرلا}$$

اس کو مساوات (۱) میں تعویض کر کے مشابہ رقموں کو ترکیب دینے کے بعد

$\text{جہا}^1 \text{ لاجم}^1 \text{ لا فرلا}$ کے لیے حل کیا جائے تو ضابطہ (ھ) حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۲) میں اس کے مشابہ تعویض کرنے سے ضابطہ (و) حاصل ہوتا ہے

ضابطہ (ھ) کو ملائت مساوات کے بائیں جانب کے تکملہ کے لیے

حل کرنے اور ن کو بقدر ۲ اضافہ کرنے سے ضابطہ (ز) حاصل ہوتا ہے۔

(F) $\frac{1}{P} + \frac{\text{جیبہ فرہ}}{P} = \text{جیبہ فرہ}$

اب (۳) کا نتیجہ (۲) میں تقویض کرو اور جو نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے اس کو (۳) میں تقویض کرو تو

$$\left[\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ} \right] = \frac{\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ}}{1} + \frac{\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ}}{2^2}$$

$$+ \frac{1}{14} (\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ} + \text{ج} + \text{ج})$$

توضیحی مثال (۲) [جب^۲فہ^۳فرفہ کی قیمت دریافت کرو۔
[یہاں م = ۲، ن = ۲ - ۱]

حل - ضابطہ (نر) استعمال کرنے سے

$$= \frac{\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ}}{2} + \frac{1}{4} \left[\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ} \right]$$

اور [جب^۲فہ^۳فرفہ] جس میں م = ۲ اور ن = ۱ پر ضابطہ (و) عالم

کرنے سے اس کی قیمت - جب^۲فہ + [جب^۲فہ^۳فرفہ] = - جب^۲فہ + کوک (قطفہ + مس^۲فہ)
برآمد ہوتی ہے ان نتائج کو اپنی اپنی جگہ پر تقویض کرنے سے

$$\left[\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ} \right] = \frac{\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ}}{2} - \frac{1}{4} \left[\text{جب}^2 \text{فہ} + \text{کوک (قطفہ + مس}^2 \text{فہ)} \right] + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{جب}^2 \text{فہ} \left(\frac{\text{جب}^2 \text{فہ}}{1} + 1 \right) + \text{کوک (قطفہ + مس}^2 \text{فہ)} \right] + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\text{مس}^2 \text{فہ} + \text{کوک (قطفہ + مس}^2 \text{فہ)} \right] + \text{ج}$$

مشالیں

مندرجہ ذیل کمتلوں کی تصدیق کرو :-

$$(1) \left[\text{جب}^2 \text{فہ} \text{فرفہ} \right] = \frac{1}{2} \text{جب}^2 \text{فہ} - \frac{1}{4} \text{جب}^2 \text{فہ} + \text{ج}$$

$$(۲) \quad \text{ج} \frac{۱}{۵} \text{جم} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۱۱} \text{جم} ۳ - \text{ج} \frac{۱}{۵} \text{جم} ۲ + \text{ج}$$

$$(۳) \quad \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{قم} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{فرزہ} - \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{قم} ۲ + \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{قم} ۲ + \text{ج}$$

$$(۴) \quad \text{ج} \frac{۱}{۱۱} \text{قط} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۱۱} \text{مس} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۱۱} \text{مس} ۲ + \text{ج} \frac{۱}{۱۱} \text{مس} ۲ + \text{ج}$$

$$(۵) \quad \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{جیب} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{جیب} ۲ + \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{جیب} ۲$$

$$+ \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{کوک} (\text{قط} ۲ + \text{مس} ۲) + \text{ج}$$

$$(۶) \quad \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{جیب} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{قم} ۲ - \text{ج} \frac{۱}{۲} \text{کوک} (\text{قم} ۲ - \text{جم} ۲) + \text{ج}$$

$$(۷) \quad \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{فرزہ} = \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جیب} ۲ - \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جیب} ۲ + \text{ج}$$

$$(۸) \quad \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جم} ۲ = \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جیب} ۲ + \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جم} ۲ + \text{ج}$$

$$(۹) \quad \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جیب} ۲ = \frac{۳۲۵}{۱۲۸}$$

$$(۱۰) \quad \text{ج} \frac{۱}{۳} \text{جیب} ۲ = \frac{۳۳}{۸} - \frac{۵}{۴}$$

۳۔ تکملوں کی جدول کا استعمال —

گیارہویں چودھویں اور موجودہ بابوں میں تکمل کے جو طریقے بیان ہوئے ہیں ان میں دیے ہوئے تکملہ کو معیاری ابتدائی صورتوں میں سے کسی ایک یا ایک سے زیادہ صورت میں تبدیل کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس غرض کے لیے متعدد ترکیبیں (مثلاً تکمل باحصص، جزوی کسور، نئے متغیر کی تبویع اور تحویلی ضابطہ

کا استعمال) کام میں لائی گئی ہیں۔
 جب کبھی ایک نسبتہ وسیع جدول تکملوں کی ہمایا ہو تو باضابطہ تکمل کے
 کسی سوال کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس جدول میں ایک ایسے
 ضابطہ کی تلاش کی جانی چاہیے جس سے دیا ہوا سوال براہ راست
 بغیر کسی مصرعہ بالاترکیبوں کی مدد کے حل ہو سکتا ہے۔ اس قسم کی جدول
 باثولی کے تکملی احصاء یا گرنول اور اسمتھ کے احصاء کی کتابوں میں موجود
 ہے۔ ان سے استفادہ کیا جاسکتا ہے۔
 اگر کوئی ایسا سوال پیش ہو جس کے لیے جدول میں ضابطہ نہ مل سکے
 تو جن ترکیبوں کا اوپر ذکر آچکا ہے ان سے مدد لے کر ایسی صورت پیدا
 کی جانی چاہیے جس سے سوال پر جدول کے ضابطوں میں سے کسی ایک
 کا اطلاق ہو سکے۔ یہ کام زیادہ تر دیرینہ مشق اور ضابطوں کے کثرت
 استعمال ہی سے ہو سکتا ہے۔

سوطھوال باب

تمکلی احصاء کے ذریعے طبیعیات کے بعض مسائل کا حل

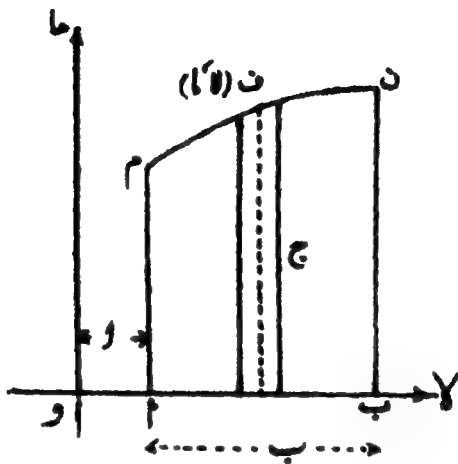
۱۔ رقبہ کا معیار اثر۔ ہندی مرکز۔ طبیعیات کے

طالب کو معلوم ہے کہ ہر مادی جسم کا ایک مرکز ثقل ہوتا ہے۔ یکساں مادے کے رقبوں کا مرکز ثقل ان کا ہندی مرکز ہوتا ہے۔ اگر کوئی مستوی شکل مرکز تشاکل رکھتی ہے تو وہی اس کا ہندی مرکز بھی ہے۔ اور اگر کسی مستوی شکل کا محور تشاکل ہے تو اس کا ہندی مرکز اس محور پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ شکل $ABCD$ میں رقبہ $ABCD$ ایک بڑی تعداد کو مستطیلوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جن میں سے ہر ایک کا قاعدہ EF ہے۔ شکل میں صرف ایک مستطیل بتایا گیا ہے۔ اگر اس کا رقبہ F فرس مانا جائے اور J (جس کے محدہ اور K ہیں) اس کا ہندی مرکز تو $F = \text{فرس}$ ، $MA = \text{لا}$ اور $K = \frac{1}{2} MA$

اس عنصری مستطیل کے رقبہ کا معیار اثر محور OK (یا OM) کے گرد اس کے رقبہ کا اس کے ہندی مرکز کے محور OK (یا OM) سے عمودی فاصلہ کے ساتھ حاصل ضرب ہے۔ اگر ایسے معیار M کے اثر کو بالترتیب F اور M سے تعبیر کیا جائے

تو فرم = ک فرس اور فرم = ۵ فرس (۲)



شکل ۵۳

اور شکل ۱۴ م ن ب کے رقبہ کا معیار اثر تکلی احصاء کے امسا
مسئلہ (دیکھو مسئلہ باب ۱۳) کو ن عنصری مستطیلوں کے معیار ہائے اثر
کے مجموعہ پر عاملہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس

م = ک فرس اور م = ک ۵ فرس (ب)

اور اگر (لا، آ) رقبہ ۱۴ م ن ب کا ہندی مرکز ہے اور م اس کا رقبہ
تو دی ہوئی شکل کے رقبہ کے معیار اثر (متعلقہ مساوات ب) اور لا و آ میں
رابطہ ہیں:-

م لا = م اور م آ = م (ج)
لا کے محسوب کرنے کے لیے رقبہ کے معیار اثر م اور م معلوم کرو۔
شکل ۵۳ کے لیے

$$م = \frac{1}{4} ک لا فرلا اور م = ک لا فرلا$$

ان ضابطوں میں ما کی قیمت لا کی قیمتوں میں (منہی م ف ن کی مساوات کی مدد سے) تعویض کی جانی چاہیے۔ اگر رقبہ سر معلوم ہے تو

$$\frac{\text{مر}}{\text{سر}} = \frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\text{ما}}{\text{سر}}$$

اگر معلوم نہیں ہے تو $\text{سر} = \text{کر} \text{ ما فر لا}$ کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔
توضیحی مثال (۱) ایک ایسے رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو جو خط مکانی $\text{ما}^2 = \text{م ف لا}$ محور لا اور منہی کے نقطہ لا، ما کے معین سے محدود ہے۔

حل۔ چونکہ $\frac{\text{مر}}{\text{سر}} = \frac{\text{لا}}{\text{اور}}$ اور $\frac{\text{مر}}{\text{سر}} = \frac{\text{ما}}{\text{سر}}$

اور $\text{مر} = \frac{\text{کر} \text{ لا ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}}$ اور $\text{سر} = \frac{\text{کر} \text{ ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}}$

پس $\frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\frac{\text{کر} \text{ لا ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}}}{\frac{\text{کر} \text{ ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}}$

اور $\frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}} = \frac{\text{کر} \text{ لا ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}} = \frac{\text{کر} \text{ ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}}$

توضیحی مثال (۲) خط ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}} + \frac{\text{لا}}{\text{اور}} = ۱$ کے پہلے ربع کے رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $\frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}} + \frac{\text{لا}}{\text{اور}}$ لہذا $\frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}} + \frac{\text{لا}}{\text{اور}}$

اور $\frac{\text{لا}}{\text{اور}} = \frac{\text{مر}}{\text{سر}} = \frac{\text{کر} \text{ لا ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}} = \frac{\text{کر} \text{ ما فر لا}}{\text{کر} \text{ لا فر لا}} = \frac{\text{ما}}{\text{اور}}$

مشائیں

(۱) منحنی $MA = M(1 - \lambda)$ کے حلقہ سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز کہاں ہے؟ [جواب $\bar{M} = \frac{1}{2}$ ، $\bar{M} = 0$]

ثابت کرو کہ :-

(۳) خطوط مکانی $MA = \lambda$ اور $LA = \lambda$ سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے محدود ہیں۔

$$\bar{M} = \frac{1}{2} \quad \bar{L} = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \bar{M} = \frac{1}{2} \quad \bar{L} = \frac{1}{2}$$

(۳) دائرہ $MA = \lambda$ اور محور LA سے محدود رقبہ کے

ہندسی مرکز کے لیے

$$\bar{M} = \frac{1}{2} \quad \bar{L} = 0$$

(۴) ایک دائری قطعہ (Segment) جس کا وتر مرکز دائرہ پر

زاویہ 2θ بنا رہا ہے) کے رقبہ کے ہندسی مرکز کا فاصلہ مرکز دائرہ سے

$$\frac{2 \text{ ص جب } \theta}{3 \text{ (ط) - جب } \theta \text{ حجم } \theta} \text{ ہے۔}$$

(۵) منحنی جس کی قطبی مساوات $r = \lambda$ حجم θ ہے اس کے ایک

حلقہ میں محدود رقبہ کا ہندسی مرکز مبداء سے فاصلہ $\frac{3}{8} \lambda$ واقع ہے۔

(۶) خط تدویر $LA = \lambda$ (ط - جب ط) $MA = \lambda$ (۱ - حجم ط) کی ایک

کمان کے رقبہ کا ہندسی مرکز بمقام $\bar{M} = \frac{1}{2}$ واقع ہے۔

(۷) ایک مکانی شکل کے پترے کا قاعدہ ۱۲ سنٹی میٹر اور ارتفاع

۸ سنٹی میٹر ہے تو اس کا ہندسی مرکز اس کے راس کے ۸ و ۴ سنٹی میٹر نیچے

واقع ہے۔

(۸) بلطانی خط $MA' = (LA - 12) = LA$ اور اس کے متقارب $LA = 12$ سے محدود رقبہ کا ہندی مرکز نقطہ $LA = \frac{12}{2} = 6$ ہے۔
(۹) ایک قطاع دائرہ (Sector) کا ہندی مرکز قطاع کے نصف

پر اس سے فاصلہ $\frac{2}{3}$ ص جب $\frac{2}{3}$ پر واقع ہے جس میں ص دائرہ کا نصف قطر اور ط قطاع کا زاویہ ہے۔

(۱۰) ناقص $\frac{LA}{1} + \frac{MA}{2} = 1$ سے جو قطعہ منحنی کے محوروں کے مثبت سروں کو ملائے والا وتر منقطع کرتا ہے اس کا ہندی مرکز نقطہ

$$LA = \frac{12}{(2-3)3} \text{ اور } MA = \frac{2}{(2-3)3} \text{ ہے}$$

[اشارہ، توضیحی مثال (۳) کو بغور دیکھا جائے]

۲۔ گردش مجسم کے ہندی مرکز کی تعیین۔

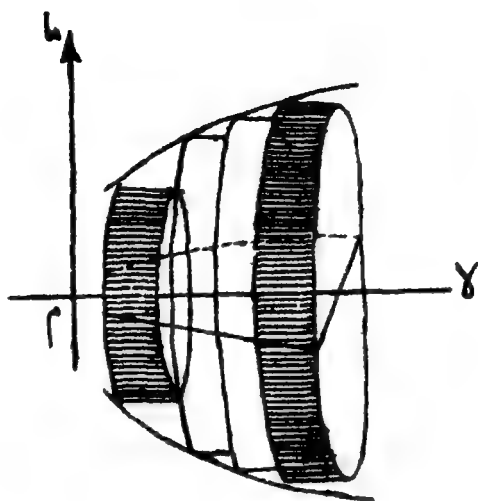
کسی متجانس ٹھوس جسم کا مرکز ثقل اس کے ہندی مرکز کے متماثل ہوتا ہے اور ہندی مرکز ٹھوس جسم کا جو بھی متماثل کا مستوی ہو اس میں واقع ہوتا ہے۔

فرق کرو م لا اس مجسم کا ہندی محور ہے۔ اس کا ہندی مرکز م لا پر واقع ہوگا۔ اگر اس کے ایک "عنصری" حجم کو یعنی م لا ارتفاع اور م نصف قطر والے اسطوانہ کو فرح سے تعبیر کیا جائے (دیکھو شکل ۱۲) تو فرح $\pi = M$ م لا اس اسطوانہ کے حجم کا معیار اثر بلحاظ محور م م کے

$$\text{فرح} = LA \text{ فرح} = \pi LA \text{ م م لا}$$

تب پورے مجسم کے حجم کا معیار اثر مکملی احصاء کے اسی مسئلہ سے دریافت ہوتا ہے اور مندرجہ ذیل ضابطہ سے آ کی قیمت

ح لا = صا = $\int \pi$ لا ما فرلا برآمد ہوتی ہے۔



شکل ۸۳

توضیحی مثال (۱) نصف کرہ مجسم کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

حل۔ مرکز گرہ کو مبداء م مان کر مجسم کی مستوی سطح کو م صا اور م کے محوروں کے مستوی میں تصور کرو۔ تب مجسم محور م لا کے لحاظ سے متشکل ہوگا۔

$$\text{پس لا} = \frac{\int \pi \text{ لا}^2 \text{ فرلا}}{\int \pi \text{ لا} (\text{صا} - \text{لا}) \text{ فرلا}} = \frac{\int \pi \text{ لا}^2 \text{ فرلا}}{\int \pi (\text{صا} \text{ لا} - \text{لا}^2) \text{ فرلا}} \quad \left[\text{اس لیے کہ لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{صا}^2 \right]$$

$$= \frac{\pi \left[\frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^2}{2} \right]_{\text{صا}}^0}{\pi \left[\frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^2}{2} \right]_{\text{صا}}^0} = \frac{\frac{1}{3} \text{صا}^3}{\frac{2}{3} \text{صا}^3} = \frac{3}{8} \text{صا}$$

توضیحی مثال (۲) قلع ناقص $\frac{\text{لا}}{2} + \frac{\text{ما}^2}{2} = 1$ اور خطوط

س کا ہندسی مرکز لا = ۰، ما = $\frac{5}{4}$ ب ہے۔

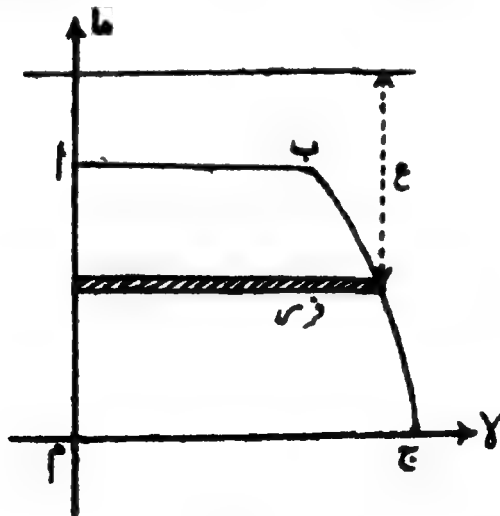
(۴) محور لا کے گرد، ناقص $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$ = ۱ کے پہلے ربع میں
بقیہ ربع کے گھومنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز
 $ا = \frac{9}{8}$ ہے۔

(۵) خط لا = ۱ کے گرد، اس خط، محور لا اور خط مکافی ما = ۲ ف کا
محدود سطح کے گھومنے سے جو گردشی مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز
قطہ ما = $\frac{5}{4}$ ب ہے جس میں ب = ۲ ف لا

(۶) محور ما اور منحنیالا - ما = ۱، ما = ۰، ما = ۱ سے محدود
بقیہ محور ما کے گرد گھومتا ہے جو مجسم اس طرح پیدا ہوتا ہے اس کا
ہندسی مرکز ما = $\frac{9}{11}$ ہے

۳۔ سیال کا دباؤ۔ فرض کرو شکل ۳ میں

یال کے اندر ایک انتصابی رقبہ اب ج م ہے۔ سیال کی کثافت



شکل ۳

ب جبکہ مستقل اور گہرائی کے غیر تابع تصور کی جاتی ہے۔ اگر اکائی و = سیال کے مانی حجم کا وزن تو چونکہ سیال کی ہر سمت میں دباؤ ایک ہی ہوتا ہے اس لیے اس کی اکملی سطح کے نیچے گہرائی ع پر دباؤ (یعنی اکائی رقبہ کی سطح پر عمل کرنے والی قوت) = وع -

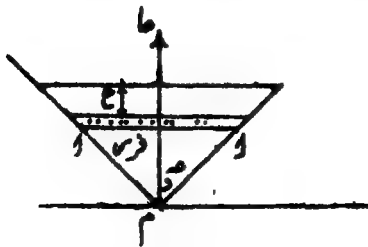
اگر رقبہ اب ج م پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرنا ہو تو اس پورے قبہ کو افقی پیشوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اگر گہرائی ع کے پاس کی پٹی کا رقبہ رسا ہے تو اس پر دباؤ

فرد = وع فرس

ہیں سارے رقبہ اب ج م پر کا حاصل مجموعی دباؤ د = (وع فرس) (۲)
رسا کو لا، ماکہ رقبوں میں اور ع کو ماکہ رقبوں میں لکھ کر منحنی ب ج کی مساوات کی مدد سے لا کو ماکہ رقبوں میں تعویض کرنے سے حاصل مجموعی دباؤ د کی تعیین ہو جاتی ہے۔

توضیحی مثال - ایک کھلمکھ منشور نما برتن کی عمودی تراش مساوی اُتار

نکٹہ کی سی ہے جس کے مساوی ضلعوں کا طول فرداً فرداً ۱ ہے اور ان کا رُمیانی زاویہ ۲ ہے۔ برتن اس طرح کھڑا ہے کہ اس کی عمودی تراش کا اس بچے اور قاعدہ متوازی الافق ہے۔ اگر اس کو و وزن فی اکائی حجم مائع سے بھر دیا جائے تو اس کے مشغلی پہلو پر کا مجموعی دباؤ ریافت کرو۔



شکل ۸۶

حل - فرد = وع فرس

ع = و حجم م - م

(دیکھو شکل ۸۶) -

اور فرس = ۲ لا فرلا

پس $d = k \text{ و } c \text{ فرسا} = d^2 k$ (ا) حجم $c = 2$ مس c فرما

$$= \frac{1}{3} r^2 \text{ و جب } c \text{ حجم } c \text{ اکائیاں}$$

مثالیں

(۱) ایک دائری تراش کا افقی تل (قطر ۲ ص) پانی سے آدھا بھرا ہوا ہے۔ اس تل کو بند کرنے والے دروازہ پر پانی کا حاصل دباؤ دریافت کرو۔
[جواب $= \frac{2}{3}$ ص]

(۲) ایک ناقص کے نصف محور اعظم و اصغر کے طول علی الترتیب ۳ اور ۲ اکائیاں اس کے نیچے والے نصف حصہ پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرو جبکہ مائع کی سطح میں (۱) اعظم محور واقع ہے (ب) اقل محور واقع ہے۔
[جواب (۱) ۸ و (ب) ۱۲ و]

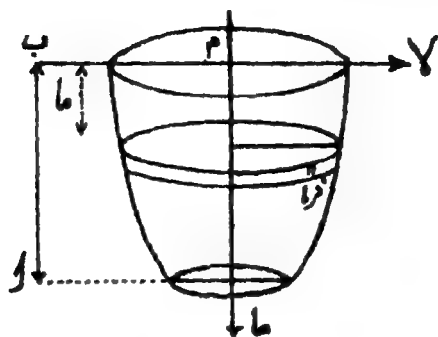
(۳) ثابت کرو کہ مائع میں ڈوبی ہوئی کسی بھی اتصالی سطح کا حاصل مجموعی دباؤ $=$ وس \times جس میں $و =$ مائع کے اکائی حجم کا وزن - $س =$ سطح کا رقبہ اور $\times =$ اس رقبہ کے ہندسی مرکز کا سطح مائع سے عمق۔

مسئلہ - کام۔ میکانیات میں بتایا گیا ہے کہ قوت اگر مستقل

ہے تو اس سے جو کام وقوع میں آتا ہے ق \times ل کے مساوی ہے جس میں ق $=$ قوت اور ل $=$ فاصلہ جو قوت کے نقطہ عمل کو قوت کی سمت میں طے کرنا پڑا۔ قوت جب متغیر ہوتی ہے تو کام کی تعیین کے لیے تکلی احصار استعمال کرنا ہوتا ہے۔ یہاں اس کی دو مثالیں پیش کی جائیں گی۔

(۱) فرض کرو کہ ایک متغیر چوڑائی کے کھوکھلے برتن کو مائع سے خالی کرنا یا مائع سے بھرنا مقصود ہے شکل ۸۷ ایک گردش پیلوڈ کا برتن ہے جس کی مختلف گہرائیوں پر عمودی تراش مختلف ہے۔ اس لیے اس کو مائع سے

بھرنے یا خالی کرنے میں جو کام کیا جاتا ہے اس کی تعیین تکلی احصاء کے اساسی



شکل ۸۷

مسئلہ سے ہو جاتی ہے۔ چنانچہ اگر عمق یا پر عمودی ترش کا نصف قطر لانا جائے تو فرما موٹائی کا، مایع کا ایک اسطوانہ، برتن کی مکملی سطح تک اوپر کو اٹھانے کا عنصری کام فرک = و ما لا فرما

اور برتن کو بالکل خالی کرنے کا کام = و ما لا فرما

برتن کے پہلو جس منحنی کی شکل کے ہونگے اس کی مساوات کی مدد سے لا کو مایع کے برتنوں میں تعویض کرنے سے مسئلہ کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔ اس استدلال میں جو اصولی کلیہ پیش نظر رکھا گیا ہے۔

فرک = و ع فرح (۱) ہے

جس میں فرح = عنصری حجم جو بلندی ع تک اوپر اٹھایا گیا ہے۔ اس رابطہ کے لحاظ سے جو بھی محدود سوال کے حل کرنے میں موزوں پائے جائیں استعمال کیے جاسکتے ہیں۔

توضیحی مثال۔ ایک نصف کرہ کی شکل کا برتن مایع سے بھرا

ہے۔ اگر مایع کا وزن فی کعب فٹ و پونڈ ہے اور نصف کرہ کا

قطر ۲ ص تو برتن کا سارا مایع اس کے اوپر کی سطح تک پمپ سے اوپر لے جانے کے لیے کتنا کام کرنا ہوگا؟

حل - یہاں حامل مجموعی کام = $\int_0^H \rho g y \, dy$ اور چونکہ برتن کی شکل نصف کرہی ہے اس لیے $y = r^2 + y^2 = r^2$

پس کام = $\int_0^H \rho g y \, dy = \frac{\rho g}{2} H^2 = \frac{\rho g}{2} \times 10^2 = 500 \text{ ft-pounds}$

(ب) اگر ایک اسطوانہ میں فشار کے ذریعہ ایک مقدار گیس بند کر دی گئی ہے اور گیس کا حجم V مکعب فٹ سے بدل کر V' مکعب فٹ ہو جاتا ہے تو گیس کے پھیلاؤ سے فشار پر جو کام کیا گیا اس کو معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل ضابطہ استعمال کیا جاتا ہے۔

کام $K = \int_{V'}^V P \, dV$ (ب)

جس میں $d =$ دباؤ پونڈوں فی فی مربع فٹ اس لیے کہ اگر حجم V سے بڑھ کر $V' + dV$ ہو جائے اور $P =$ اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ - تو گیس کے پھیلنے سے فشار فاصلہ dV/P فٹ آگے بڑھتا ہے اور اس پھیلاؤ کا باعث قوت dP ہے۔

پس عنصری کام = $dK = P \, dV = dV \, dP$

اور اساسی مسئلہ کی رو سے حامل مجموعی کام = $\int_{V'}^V P \, dV$

d اور V میں عام رابطہ $dP = -\frac{P}{V} dV$ مستقل ہے جس میں n خود ایک مستقل ہے۔ اگر گیس کا پھیلاؤ ہم پشی (isothermal) ہے تو مندرجہ بالا ضابطہ میں $n = 1$ اور اگر حرانگزار (adiabatic) ہے تو $n = \gamma$

اگر $dP = -\frac{P}{V} dV$ مستقل کی ترسیم کھینچی جائے یعنی دباؤ کو معین اور حجم کو فاصلہ

نوادیکر قلم اہم دباؤ کی تبدیلیاں مرسم کی جائے تو اس طرح جو رتبہ حاصل ہو گا کئے ہوئے
کام کو تعبیر کر دیا۔
 واضح ہے کہ ہم بخشی استمال میں د'ح کی ترسم قائم قطع زائد کی شکل
کی ہتی ہے۔

۵۔ قوتِ تجاوب — اس فصل میں کلیہ تجاوب

(یعنی دو مادی ذرات کی کیفیتیں اگر کہہ سکیں ہیں امدان کے امین فاصلہ ل تو ان کی باہمی کشش = ہر کہ کہ جس میں م مستقل تجاذب ہے) کے اطلاق سے بعض خاص خاص ہندسی شکل کے اجسام کی تجاذبی قوتیں دریافت کی جائیں گی۔ تجاذب کے عام مسائل مشکل ہوتے ہیں۔ یہاں ہم صرف ان ہی سے بحث کریں گے جو اکھیرے تکمل کی مدد سے آسانی حل ہو جاتے ہیں۔

(۲) یکساں طولی کثافت کی پتلی سلاخ کی کشش

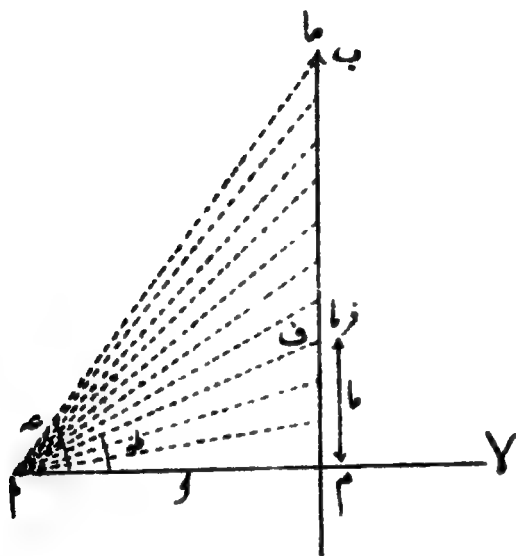
ایک بیرونی نقطہ پر۔

۲۔ فرض کرو کہ سلاح محور ما سے منطبق ہے اور محور لا کے نقطہ ۱ پر اکائی کمیت کا ایک فذہ ہے (دیکھو شکل ۱۱۱) ہم چاہتے ہیں کہ سلاح کی فذہ پر کیا کشش ہوگی معلوم کریں۔

اگر سلاخ کا طول M ب L یا تا جائے اور اس کو کثیر التعداد چموتے چھوٹے مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو اس کی مجموعی کیفیت $K = \frac{L}{M}$ جس میں $\frac{L}{M}$ = سلاخ کی خطی کثافت یعنی اکائی طول کی کیفیت۔

فرض کرو عمودی فاصلہ $AM = f$
 سلاخ کے کسی عنصری ٹکڑے کی کشش $\frac{f}{(1 + f)}$ پر مر فراش

اور اس کی سمت نقطہ α کو سلاخ کے اس خاص ٹکڑے سے ملانے والے خط



شکل ۸۸

α ف کی سمت ہوگی۔
پس اس کشش کا جزو تحلیلی α م کی سمت میں

$$= \frac{\text{مرشہ فرما}}{(\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{\text{مرشہ لا فرما}}{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

اس طرح اس کشش کا جزو تحلیلی α م کی سمت میں

$$= \frac{\text{مرشہ فرما}}{(\alpha^2 + \beta^2)} \text{ جب } \alpha \text{ م ف} = \frac{\text{مرشہ ما فرما}}{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

∴ اگر $Q =$ مائل مجموعی جزو تحلیلی تمام ٹکڑوں کی کششوں کا سمت α م لا

میں اور $Q =$ مائل مجموعی جزو تحلیلی سمت α م میں تو

۱ کو مرکز اور ۱ د کو نصف قطر مان کر دائری قوس دب کیچھو جو اب کو
ب اور ۱ ج کو ج پر قطع کرتی ہے اور ۱ م کو م اور ۱ ن کو ن پر۔

$$\text{تب جزو م ن کی کشش ۱ پر} = \frac{\text{مرثہ (م ن)}}{(م ۱)}$$

اور رقبہ ۱ م ن : ۱ م ن = ۱ (م ن) : ۱ (م ن)
لیکن رقبہ ۱ م ن : ۱ م ن = ۱ (م ۱) : ۱ (م ۱) اس لیے
زاویہ م ۱ ن بہت چھوٹا ہے۔

$$\therefore م ن : م ن = (م ۱) : (م ۱) \text{ یا } \frac{م ن}{(م ۱)} = \frac{م ن}{(م ۱)} = \frac{م ن}{۱}$$

پس م ن کی کشش ۱ پر = $\frac{\text{مرثہ (م ن)}}{۱}$

اگر قوس ب ج کو ماوے سے یکساں لدا ہوا فرض کیا جائے اس طرح پر کہ اس
کی خطی کثافت سلاخ کی خطی کثافت کے برابر ہو تو اس کی حاصل مجموعی کشش سلاخ کی
حاصل مجموعی کشش کے مساوی ہوگی

قوس کی حاصل مجموعی کشش کی سمت زاویہ ب ج کی تنصیف کرتی ہے

فرض کرو زاویہ ب ج = θ حاصل مجموعی کشش کی سمت سے زاویہ

تب قوس کے عنصر یا جزو ۱ فرطہ کی کشش، حاصل مجموعی کشش کی سمت سے زاویہ

۱ میں $\frac{\text{مرثہ فرطہ}}{۱}$ ہے اس کشش کا جزو تحلیلی حاصل مجموعی کشش کی سمت میں

$\frac{\text{مرثہ فرطہ}}{۱}$ جم طہ ہے

پس قوس کی حاصل مجموعی کشش یعنی سلاخ کی حاصل مجموعی کشش

$$\frac{\text{مرثہ}}{۱} + \frac{\text{مرثہ}}{۱} = \text{جم طہ فرطہ} = \frac{۲ \text{ مرثہ جب } \frac{\theta}{۲}}{۱} = \frac{۲ \text{ مرثہ جب } \frac{\theta}{۲}}{۱}$$

(ب) یکساں سطحی کثافت کے دائری قرص کی کشش اس کے

محور پر کے کسی نقطہ پر۔

فرض کرو کہ قرص کی کثافت سطحی (یعنی کمیت فی اکائی رقبہ سطح) ρ ہے
م اس کا مرکز ہے اور r اس کا نصف قطر (شکل ۹) م کو مرکز ان کر
دو متصل دائرے r اور R + فرض نصف قطر کے کہیں جو۔ اس سے

جو حلقہ بنتا ہے اس کی کمیت

$$= \pi R^2 \rho - \pi r^2 \rho$$

نقطہ A پر قرص کی کشش مطلوب

ہے۔ مندرجہ بالا حلقہ کا ہر ذرہ

A سے فاصلہ $\sqrt{r^2 + z^2}$ ہے

واقع ہے۔ تشاکل سے واضح ہے

کہ حلقہ کی حاصل مجموعی کشش محور

A م کی سمت میں ہے۔ پس

حلقہ کی حاصل مجموعی کشش A پر

$$\frac{\pi R^2 \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}}{\pi r^2 \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}} = \frac{\pi R^2 \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}}{\pi r^2 \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}} =$$

جس میں $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ یعنی A کا فاصلہ M سے

$$\therefore \text{پورے قرص کی کشش نقطہ } A \text{ پر} = \frac{M}{\pi r^2} \int_0^R \frac{2\pi r \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}}{\pi r^2 \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{z} \right] \cdot \frac{M}{\pi r^2} \cdot 2\pi r \rho \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} =$$

اگر قرص کا نصف قطر R نامتناہی بڑا ہو جائے تو ایک نامتناہی وسیع پرت
بن جاتی ہے اور اس کی کشش $\pi R^2 \rho$ ہو جاتی ہے جو پرت کے فاصلہ کے
غیر تابع ہے۔

(ج) یکساں کثافت کے کروی خول کی کشش۔

قائم دائری اسطوانہ کی کشش ایک ایسے ذرہ پر جو اس کے محور پر سرے سے

ط فاصلہ پر ۳۲ مرثہ {ب-} $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (ط + ب) + ۲ ص + ۲ ط + ۲ ص \right]$ ہے۔

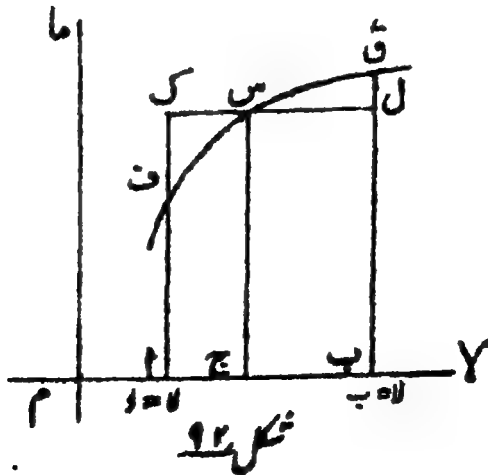
(۴) اگر کسی قائم دائری مخروط کی بلندی ب، راسی زاویہ عمود اور کثافت
ث ہو تو بتاؤ کہ اس کی حاصل مجموعی کشش اس کے راس پر رکھے ہوئے ذرہ پر
۳۲ مرثہ (۱- جم $\frac{1}{2}$) ب ہے۔

(۵) ایک گردشی مکانی نما کا قطعہ اس کے محور کے علی القوائم
مستوی سے محدود ہے۔ اگر مستوی کا فاصلہ مکانی نما کے راس سے ط ہے تو
اس کے ماسکے پر رکھے ہوئے ذرہ پر اس کی کشش ۳۲ مرثہ $\frac{1}{2} (ط + ب)$ ہے

۱- کسی تفاعل کی اوسط قیمت — ن اعداد

ما، ما، ما کا حسابی اوسط (یا ان کی اوسط قیمت) $ما = \frac{1}{n} (ا + ب + ل)$
ہم اب تفاعل فہ (لا) کی اوسط قیمت لا = ل سے لے کر ا = ب تک کی تعین
کرنا چاہتے ہیں۔

شکل ۱۲ میں ف س ق کو اس تفاعل کی ترتیب مندرجہ کرو۔
م = ا اور م ب = ب



۱۔ اب کو ن مساوی حصوں میں منقسم کرو جن میں سے ہر ایک مذہ لا کے مساوی ہے۔ اور ان نقاط تقسیم پر کے معینوں کو 'ا' 'ب' 'ن' سے تعبیر کرو۔ تب

آ = $\frac{1}{n} (ا + ب + + ن)$ مطلوبہ اوسط تقریبی قیمت ہوگی۔ علامت مساوات کے بائیں جانب کے شمار کنندہ اور نسب نما کو مفت لائے ضرب دو تو چونکہ ن مفت لا = ب۔ و اس لیے

$$آ = \frac{ا + ب + + ن}{ن} \text{ (تقریباً) } \dots\dots\dots (۱)$$

لیکن اس آخری مساوات میں شمار کنندہ رقبہ ا ف س ق ب کے تقریباً مساوی ہے۔

تفاعل لا = ذ (لا) کی اوسط قیمت کی تعریف یہ ہے کہ وہ مساوات (۱) کے بائیں جانب کے جملہ کی انتہا ہے جبکہ ن ∞ پس

$$آ = \text{تفاعل ذ (لا) کی اوسط قیمت لا} = \text{و سے لا} = \text{ب تک}$$

$$(۲) = \frac{\text{پ کو ذ (لا) فرلا}}{ب - و}$$

شکل بالا میں ذ (لا) کی اوسط قیمت معین ج م کے مساوی ہے اگر متغیل اب ل کن کا رقبہ شکل اب ق م ف کے رقبہ کے مساوی ہے۔ ماکو تفاعل لینے تابع متغیر لکھنے سے مساوات (۲) ذیل کی صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$آ = \frac{\text{پ کو م فرلا}}{ب - و} \dots\dots\dots (ب)$$

توضیحی مثال۔ متبادل برقی روؤں کے نظریہ میں

اکثر جب لا کی اوسط قیمت (مابین حد و حد = ۰ اور ط = π) معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ بتاؤ کہ یہ قیمت پ ہے۔

$$\text{حل۔ اوسط قیمت} = \frac{\int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta}{\int_0^{\pi} 1 \, d\theta} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta}{\int_0^{\pi} 1 \, d\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi \\ \int_0^{\pi} 1 \, d\theta &= \theta \Big|_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

مثالیں

(۱) دائرہ لا + ما = ص ۲ کے پہلے ربع کے معینوں کی اوسط قیمت دریافت کرو۔

(ا) جبکہ ما کو بطور تغاغل لا ظاہر کیا جاتا ہے [جواب = $\frac{1}{\pi}$ ص ۱]
اور (ب) جبکہ ما کو بطور تغاغل زاویہ ط ظاہر کیا جاتا ہے یعنی ما = ص جب ط
[جواب = $\frac{2}{\pi}$ ص ۲]

(نوٹ) - اس سے واضح ہے کہ ما کی دو بالکل مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو متبوع متغیر پر موقوف ہیں جس کے لحاظ سے اوسط قیمت دریافت کی جاتی ہے۔
نہایت کرو کہ

(۲) جب ط کی اوسط قیمت لا = ۰ اور لا = π کے درمیان $\frac{\pi}{2}$ ہے۔
(۳) سادہ موسیقی حرکت میں (س) = ۱ جہن و جس میں س = ط شدہ
فاصلہ ۱ اورن = مستقل اعداد و = وقت) اوسط توانائی بالفعل لہذا وقت
ربع مدت دوران کے کسی ضعف کے لیے اعظم توانائی بالفعل کی نصف ہے۔
(۴) ل طول کی ایک پتلی سلاخ کی کثافت اگر لا کے لحاظ سے حسب ضابطہ
ف = ۱ + $\frac{1}{\pi}$ تغیر پذیر ہے جس میں لا = سلاخ کا فاصلہ اس کے ایک سرے سے
تو اس کی اوسط کثافت = ۱ + $\frac{1}{\pi}$ ہے
(۵) اوسط افقی ٹیپ ایسے مرنی کا جہاں اختیاری ارتفاع سے دی ہوئی رفتار کے ساتھ

پھینکا جاتا ہے اعظم افقی ٹیپ کا ۰.۶۳۶۶ ہے [اشارہ - ٹیپ = $\frac{2}{\pi}$ جب ط بمطابق جس میں

ر = رفتار ج = جاذبہ ارض]

سترہواں باب

نامتناہی سلسلے

۱۔ جب کئی رقیں ایک خاص قاعدے یا کلیبہ کے تحت کیے بعد دیگرے ترتیب دی جاتی ہیں تو اس ترتیب کو توانتر کہتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$$\text{یا } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

کسی توانتر کی رقیوں کے منظرہ مجموعہ کو سلسلہ کہتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

اگر کسی سلسلہ کی رقیوں کی تعداد محدود ہے تو سلسلہ محدود یا متناہی کہلاتا ہے اور اگر رقیوں میں تعداد محدود نہیں ہے تو نامتناہی کہلاتا ہے۔

سلسلہ کی عام یا ن۔ ویں رقم ایک ایسا جملہ ہے جس میں اس سلسلہ کی مختلف رقیوں کی تیاری کا قاعدہ مضمر ہے۔

پہلے سلسلہ کی ن۔ ویں رقم $\frac{1}{n}$ ہے اور دوسرے سلسلہ کی (باستثناء ن = ۱)

(- لا) $\frac{1-n}{1-n}$ ہے۔

پہلا سلسلہ ہندی سلسلہ کی ایک خاص مثال ہے جس کی n رقموں کا حاصل مجموعہ ہے :

س_n = $1 + 1r + 1r^2 + 1r^3 + \dots + 1r^{n-1}$ (۱)
جس کی قیمت (جیسا کہ جبر و مقابلہ کی ابتدائی کتابوں میں بتایا گیا ہے)

$$س_n = \frac{1 - (1r)^n}{1 - 1r} \text{ یا } \frac{1 - (r^n)}{1 - r} \text{ ہے}$$

پہلا جملہ اس صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $|r| > 1$ اور دوسرا جبکہ $|r| < 1$

پہلی صورت میں واضح ہے کہ یہ $(r) = 0$ اور \therefore نہ $س_n = \frac{1}{1-r}$ پس اگر $|r| > 1$ تو ایک ہندی سلسلہ کا حامل مجموعہ $س_n$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے جیسے جیسے کہ سلسلہ کی رقموں کی تعداد نامتناہی بڑھتی جاتی ہے۔ اسی صورت میں سلسلہ مستند کہلاتا ہے۔

اگر $|r| < 1$ تو n کے لا انتہا بڑھنے سے r^n نامتناہی ہو جاتا ہے۔ اور حامل مجموعہ $س_n$ لا انتہا بن جاتا ہے۔ اسی صورت میں سلسلہ متسع کہلاتا ہے۔

اگر $r = 1$ تو سلسلہ $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ہو جاتا ہے۔ جس میں اگر n جفت عدد ہے تو حامل مجموعہ صفر ہے اور اگر n طاق عدد ہے تو حامل مجموعہ 1 ہے۔ n جیسے جیسے بلا انتہا بڑھتا ہے تو حامل مجموعہ نہ تو نامتناہی ہوتا اور نہ کسی حد یا انتہا کو پہنچتا ہے۔ ایسے سلسلہ کو اہتزازی کہتے ہیں۔

۱۔ مستند و متسع سلسلے - سلسلہ

$$س_n = 1 + 1r + 1r^2 + 1r^3 + \dots + 1r^{n-1}$$

میں متغیر n ایک تفاعل ہے n کا۔ اب اگر سلسلہ کے رقوم کی تعداد $(=n)$ بلا انتہا بڑھ جائے تو ذیل کی دو صورتوں میں سے ایک صورت پیدا ہوتی ہے :

صورت (۱) n ایک انتہا کو پہنچتا ہے (بالفرض ∞) جس کو ہم لکھتے ہیں

$$(1) \quad n \rightarrow \infty \quad \text{یا} \quad n = \infty$$

اس صورت میں یہ نامتناہی سلسلہ مستحق کہلاتا ہے اور قیمت ∞ کو پہنچتا ہے۔

صورت (۲) n کسی انتہا کو نہیں پہنچتا۔
ایسے نامتناہی سلسلہ کو متعین کہتے ہیں۔ مثلاً

یہ پہچاننے کے لیے کہ آیا کوئی سلسلہ متعین ہے یا متعین ذیل میں چند علم مسئلے بلا ثبوت مرجع کیے جاتے ہیں :—

مسئلہ (۱) اگر n ایک ایسا متغیر ہے جو n کے بڑھنے سے ہمیشہ بڑھتا ہے لیکن کبھی کسی معین عدد و عدد n سے زیادہ نہیں ہوتا تو n جیسے جیسے بلا انتہا بڑھتا ہے n ایک ایسی انتہا کو پہنچے گا جو n سے زیادہ نہیں ہے۔

توضیحی مثال۔ ثابت کرو کہ نامتناہی سلسلہ

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots (2) \text{ مستحق ہے۔}$$

حل - اس سلسلہ کی پہلی رقم کو نظر انداز کر کے اس کو س ن سے تعبیر کرو
اس کا مقابلہ سلسلہ

$$س ن = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \text{ سے کرو۔}$$

$$\text{فوراً معلوم ہو جائیگا کہ } س ن > س ن \text{ کیونکہ } \frac{1}{2 \times 2} > \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

اس طرح $\frac{1}{3 \times 3} > \frac{1}{3 \times 3}$ وغیرہ

معذاً س ن ایک ہندسی سلسلہ ہے جس میں $r = \frac{1}{2}$ پس $س ن > 2$ بلا لحاظ
اس کے کہ کتنا ہی بڑا ہو جائے۔

پس س ن ایسا متغیر ہے جو ن کے بڑھنے سے ہمیشہ بڑھتا ہے لیکن 2 سے
کم رہتا ہے۔ اس لیے وہ ن کے بلا انتہا بڑھنے سے ایک انتہا کو پہنچتا ہے
جو 2 سے کمتر ہے بدین وجہ سلسلہ (۲) مستند ہے اور اس کی قیمت 3 سے
کم ہے۔

طالب علم نے پہچان لیا ہوگا کہ سلسلہ (۲) متقل ہو $= 2.541828 \dots$ ہے
جو طبعی لوکارتموں کا اساس ہے

مسئلہ (۲) اگر س ن ایسا متغیر ہے کہ وہ گھٹتا جاتا ہے

جیسے جیسے ن بڑھتا ہے اور کبھی بھی ایک معین محدود عدد
ب سے کمتر نہیں ہوتا ہے تو جیسے جیسے ن بلا انتہا بڑھتا
ہے س ن ایک ایسی انتہا کو پہنچے گا جو ب سے کمتر نہیں ہے۔

مسئلہ (۳) سلسلہ س ن $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$

میں جیسے جیسے ن نامتناہی ہوتا جاتا ہے س ن ایک انتہا کو پہنچنے
کے لیے لازمی اور کافی شرط یہ ہے کہ

$$\text{نہا} \left(\frac{1}{\infty} \right) = (\text{س} + \text{ن} - \text{من}) = \dots \dots \dots (۲)$$

صحیح عدد دہ کی جملہ قیمتوں کے لیے
اگر مسئلہ (۳) میں ف = ۱ لکھا جائے تو شرط یہ ہو جاتی ہے کہ

$$\text{نہا} \left(\frac{1}{\infty} \right) = (\text{ن} + ۱) = \dots \dots \dots (ب)$$

جو مرادف ہے اس کے کہ

$$\text{نہا} \left(\frac{1}{\infty} \right) = ۰ = \dots \dots \dots (ج)$$

لیکن یہ شرط لازمی ہوگی کافی نہیں۔ یعنی اگر کسی سلسلہ کی مام یا ن۔ ویں
رقم ن کے بلا انتہا بڑھ جانے سے صفر کو نہیں پہنچتی ہے تو ہم فوراً پہچان
لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متع ہے۔ لیکن اگر ن۔ ویں رقم صفر کو پہنچ جائے تو
قطعی طور پر نہیں کہا جاسکتا کہ سلسلہ مستحق ہے۔ مثلاً موسیقی سلسلہ

$$۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots + \frac{1}{n} \text{ پر غور کیا جائے۔}$$

$$\text{اس میں نہا} \left(\frac{1}{\infty} \right) = \text{نہا} \left(\frac{1}{n} \right) = ۰ \text{ یعنی شرط (ج) کی}$$

مکمل ہوتی ہے لیکن ہم آئندہ فصل میں بتائیں گے کہ یہ سلسلہ متع ہے۔
یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا سلسلہ مستحق ہے یا متع ہم اب چند
خاص خاص آزمائش کے طریقے بیان کریں گے جو متذکرہ بالا سلسلوں سے آسان تر ہیں۔

۳۔ مقابلہ کے ذریعہ آزمائش —

استدقاق کا امتحان۔ فرض کرو کہ

(۱) مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے جس کے استدقاق کا امتحان مطلوب ہے۔

اگر مثبت رتوں کا ایک ایسا سلسلہ جس کے مستحق ہونے کا پہلے ہی سے علم ہے۔ یعنی

$$۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + (۲)$$

دریافت ہو سکتا ہے جس کی رتیں سلسلہ (۱) کی متناظر رتوں سے کبھی بھی کمتر نہیں ہیں تو سلسلہ (۱) مستحق ہے اور اس کی قیمت سلسلہ (۲) کی قیمت سے زائد نہیں ہے۔

ثبوت۔ فرض کرو $س_۱ = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$

اور $س_۲ = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$

اور $س_۱ = ۱$ تو چونکہ $س_۱ > ۱$ اور $س_۱ \geq س_۲$

اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ $س_۱ > ۱$ ۔ پس $س_۱$ کے سلسلہ (۱) سے

$س_۱$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے اور سلسلہ (۱) مستحق ہے اور اس کی قیمت ۱ سے زائد نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۱) دریافت کرو کہ آیا سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \dots$$
 مستحق ہے۔

حل۔ اس کا مقابلہ ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \dots$$
 سے کرو جس کا مستحق ہونا

معلوم ہے۔ سلسلہ زیر امتحان کی رتیں کبھی بھی اس ہندسی سلسلہ کی متناظر رتوں سے کمتر نہیں ہیں۔ پس وہ بھی مستحق ہے۔

اسی طرح اتساع کا بھی امتحان کیا جاسکتا ہے۔ چنانچہ

$$فرض کرو $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + (۳)$$$

مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے جس کے اتساع کا امتحان مطلوب ہے۔ اگر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \dots \dots \dots (۴)$$

مثبت رقموں کا ایک ایسا سلسلہ ہے جس کے اتساع کا پہلے ہی سے علم ہے اور سلسلہ (۳) کی رقمیں کبھی بھی سلسلہ (۴) کی متناظر رقموں سے کمتر نہیں آئیں تو سلسلہ (۳) قسع ہے۔

توضیحی مثال (ب) مقابلہ کے ذریعے بتاؤ کہ موسیقی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \dots \dots \text{قسع ہے۔}$$

حل۔ یہ سلسلہ مقابلہ کی سہولت کی خاطر ذیل کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:

$$1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right] + \left[\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{14} \right] + \dots$$

اس کا مقابلہ سلسلہ

$$1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{14} \right] + \dots$$

سے کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ پہلے سلسلہ کی رقمیں دوسرے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کبھی بھی کمتر نہیں ہیں۔ جس کی قوسین کے اندر کی رقموں کا حاصل جمع ہمیشہ $\frac{1}{2}$ ہے۔ واضح ہے کہ آخر الذکر سلسلہ کی قیمت رقموں کی تعداد کے بڑھنے سے بلا انتہا بڑھتا چلا جاتا ہے۔ اس لیے پہلا یعنی موسیقی سلسلہ بھی قسع ہے۔

ک۔ سلسلہ یعنف

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \dots \dots (۵) \text{ کے استدقاق و اتساع کے ثلث}$$

جب کہ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ میں جمع کرنے سے

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$^1\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} > \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^8}$$

$$\frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} + \frac{1}{p^8} > \frac{1}{p^{16}} + \dots + \frac{1}{p^{16}} + \frac{1}{p^{16}} + \frac{1}{p^{16}}$$

$$^3\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{p^3}{p^8} = \frac{1}{p^8} +$$

اسی طرح دوسری رقوموں کے لیے بھی ایسا لکھا جاسکتا ہے۔ اب ذیل کے سلسلہ پر غور کیا جائے :

$$1 + \frac{1}{1-p} + ^1\left(\frac{1}{1-p}\right) + ^2\left(\frac{1}{1-p}\right) + \dots \dots \dots (۶)$$

جب کہ < ۱ تو سلسلہ (۶) ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی مشترک نسبت اکائی سے کمتر ہے اس لیے یہ سلسلہ متدی ہے۔ پس سلسلہ (۵) بھی متدی ہے۔
جب کہ $= ۱$ تو سلسلہ (۵) موسیقی ہو جاتا ہے جو ہم نے دیکھا متع ہے۔
جب کہ > ۱ تو پہلی رقم کو چھوڑ کر دیکھیں تو اس کی رقیں موسیقی سلسلے کی متناظر رقوموں سے زیادہ قیمت کی ہونگی۔ پس ایسی صورت میں سلسلہ (۵) قس ہوگا۔

مثالیں

ثابت کرو کہ

$$(۱) \quad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots \dots \dots \text{متدی ہے۔}$$

$$(۲) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \dots \dots \text{متع ہے۔}$$

$$(۳) \quad \frac{2}{۲.۳.۴} + \frac{۲}{۳.۴.۵} + \frac{۲}{۴.۵.۶} + \dots \dots \dots \text{متدی}$$

نوٹ: [۲.۳.۴ سے مراد ۲ مضروب ۳ مضروب ۴]

$$(۴) \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} \dots \text{متع ہے۔}$$

$$(۵) \quad \frac{1}{2-3} + \frac{1}{2-9} + \frac{1}{2-27} + \dots + \frac{1}{2-3^n} \dots \text{مستق ہے۔}$$

$$(۶) \quad \frac{3}{3 \times 2} + \frac{6}{2 \times 3} + \frac{9}{3 \times 4} + \dots + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \dots \text{متع ہے۔}$$

۲۔ کاوشی (cauchy) کا امتحانی نسبت کے
فریجہ آزمائش کا طریقہ — امتحانی ہندی سلسلہ

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1} + \dots$$

میں دو متصل عام رقموں r^n اور r^{n+1} کی نسبت مشترک نسبت رہے۔
ہمیں معلوم ہے کہ یہ سلسلہ مستق ہے جبکہ $|r| < 1$ اور دوسری قیمتوں کے لیے
متع ہے۔ اب ہم ایک ایسے امتحان کی تفہیم کریں گے جس کا اطلاق ہر سلسلہ پر
ہو سکتا ہے۔

مسئلہ ۱۔ فرض کرو $k + \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} + \dots + \frac{k}{n^{n-1}} + \frac{k}{n^n} + \dots$ (۱)
نسبت رقموں کا ایک امتحانی سلسلہ ہے۔ اس کی دو عام متصل رقموں کی نسبت
 $\frac{k}{n} + \frac{k}{n^2}$ امتحانی نسبت کہلاتی ہے۔ اس کی انتہا جبکہ n لائنہاری کو
پہنچ جاتا ہے $s = \frac{k}{1-n}$ ہے

ہم بتائیں گے کہ (۱) جب $s > 1$ تو سلسلہ مستق ہے

(۲) جب $s < 1$ تو سلسلہ متع ہے

اور (۳) جب $s = 1$ تو امتحانی نسبت کے فریجہ آزمائش کا نتیجہ

جب ک < ا تو سلسلہ متناقض ہوتا ہے

اور جب ک > ا تو سلسلہ متناقص ہوتا ہے

جس سے ظاہر ہے کہ سرا کی قیمت اکائی کے مساوی ہو سکتی ہے۔ متناقض سلسلوں کے لیے بھی اور متناقص سلسلوں کے لیے۔ یعنی ایسی صورت میں امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمائش نامہ کامیاب ہو جاتی ہے۔ ایسی صورتوں میں دوسرے آزمائشی طریقے استعمال ہوتے ہیں۔ جو اس کتاب کے نصاب سے باہر ہیں۔

یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ کسی سلسلہ کے استدقاق کے لیے نسبت $\frac{ن}{ک}$ کا ن کی ہر قیمت کے لیے اکائی سے کمتر ہونا اور کمتر رہنا کافی نہیں ہے۔ شرط یہ ہے

کہ $\frac{ن}{ک} > ۱$ ۔ اکائی سے کمتر ہو۔

کسی سلسلہ کے استدقاق کا جب امتحان کیا جاتا ہے تو (جیسا کہ چند ایک مرتبہ کیا گیا ہے) ہم مجاز ہیں کہ سلسلہ کی رتقوں کی ایک محدود تعداد کو نظر انداز کر دیں۔ اس سے سلسلہ کی قیمت متاثر ہوگی لیکن سلسلہ کی انتہا کے وجود پر اس کا کوئی اثر نہ ہو گا۔

۵۔ متبادل سلسلے۔ جس سلسلہ کی رتقیں متبادلاً

(یعنی یکے بعد دیگرے) مثبت اور منفی ہوتی ہیں متبادل کہلاتا ہے۔ ایسے سلسلوں سے بکثرت سابقہ پڑتا ہے۔

مسئلہ اگر $۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + \dots$ ایک متبادل سلسلہ ہے جس کی ہر رقم اس سے پیشتر کی رقم سے عدداً کمتر ہوتی ہے اور اگر $\frac{ن}{ک} = ۱$ ۔ تو وہ سلسلہ متناقض ہوتا ہے۔

ثبوت۔ جب $\frac{ن}{ک} = ۱$ ایک جنت عدد ہے تو سلسلہ کا عامل جمع میں

ذیل کی دو شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے :-

$$(۱) \text{ من } = (۱ - ۱) + (۲ - ۱) + \dots + (۱۰۰ - ۱)$$

(۲) من = ۱ - (۱ - ۱) - (۲ - ۱) - (۳ - ۱) - (۴ - ۱) - (۵ - ۱) - (۶ - ۱) - (۷ - ۱) - (۸ - ۱) - (۹ - ۱) - (۱۰ - ۱) - (۱۱ - ۱) - (۱۲ - ۱) - (۱۳ - ۱) - (۱۴ - ۱) - (۱۵ - ۱) - (۱۶ - ۱) - (۱۷ - ۱) - (۱۸ - ۱) - (۱۹ - ۱) - (۲۰ - ۱) - (۲۱ - ۱) - (۲۲ - ۱) - (۲۳ - ۱) - (۲۴ - ۱) - (۲۵ - ۱) - (۲۶ - ۱) - (۲۷ - ۱) - (۲۸ - ۱) - (۲۹ - ۱) - (۳۰ - ۱) - (۳۱ - ۱) - (۳۲ - ۱) - (۳۳ - ۱) - (۳۴ - ۱) - (۳۵ - ۱) - (۳۶ - ۱) - (۳۷ - ۱) - (۳۸ - ۱) - (۳۹ - ۱) - (۴۰ - ۱) - (۴۱ - ۱) - (۴۲ - ۱) - (۴۳ - ۱) - (۴۴ - ۱) - (۴۵ - ۱) - (۴۶ - ۱) - (۴۷ - ۱) - (۴۸ - ۱) - (۴۹ - ۱) - (۵۰ - ۱) - (۵۱ - ۱) - (۵۲ - ۱) - (۵۳ - ۱) - (۵۴ - ۱) - (۵۵ - ۱) - (۵۶ - ۱) - (۵۷ - ۱) - (۵۸ - ۱) - (۵۹ - ۱) - (۶۰ - ۱) - (۶۱ - ۱) - (۶۲ - ۱) - (۶۳ - ۱) - (۶۴ - ۱) - (۶۵ - ۱) - (۶۶ - ۱) - (۶۷ - ۱) - (۶۸ - ۱) - (۶۹ - ۱) - (۷۰ - ۱) - (۷۱ - ۱) - (۷۲ - ۱) - (۷۳ - ۱) - (۷۴ - ۱) - (۷۵ - ۱) - (۷۶ - ۱) - (۷۷ - ۱) - (۷۸ - ۱) - (۷۹ - ۱) - (۸۰ - ۱) - (۸۱ - ۱) - (۸۲ - ۱) - (۸۳ - ۱) - (۸۴ - ۱) - (۸۵ - ۱) - (۸۶ - ۱) - (۸۷ - ۱) - (۸۸ - ۱) - (۸۹ - ۱) - (۹۰ - ۱) - (۹۱ - ۱) - (۹۲ - ۱) - (۹۳ - ۱) - (۹۴ - ۱) - (۹۵ - ۱) - (۹۶ - ۱) - (۹۷ - ۱) - (۹۸ - ۱) - (۹۹ - ۱) - (۱۰۰ - ۱)

تو سین میں جو چلے لکھے گئے ہیں ان میں سے ہر ایک مثبت ہے پس جبکہ ن جنت قیمتوں میں سے بڑھتا جاتا ہے تو (۱) سے ظاہر ہے کہ من بڑھتا ہے اور (۲) بتاتا ہے کہ من ہمیشہ ۱ سے کمتر ہے۔ پس من کے مسئلہ (۱) سے من ایک انتہا کو پہنچتا ہے۔ لیکن من بھی اس انتہا کو پہنچتا ہے اس لیے کہ من ۱۰۰ = من + ۱۰۰ اور من ۱۰۰ = ۰ پس جب کہ ن تمام صحیح عددی قیمتوں میں سے بڑھتا ہے تو سلسلہ مستند ہوتا ہے۔

توضیحی مثال - متبادل سلسلہ ۱ - $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ کے استنتاج کا امتحان کرو۔

حل - چونکہ سلسلہ کی ہر رقم عددی قیمت کے لحاظ سے اس سے بیشتر آنے والی رقم سے کمتر ہے اور

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

اس ثبوت سے ذیل کا اہم نتیجہ قابل یادداشت ہے:

ایک مستند متبادل سلسلہ کو کسی رقم کے بعد ختم کر دینے سے جو غلط واقع ہوتی ہے سلسلہ کی ترقی کو رقم میں سے بے پہلی رقم کی قیمت سے عدد آزاد نہیں ہوتی۔

۶۔ مطلق استنتاج - جب کسی سلسلہ کی تمام

رقمیں مثبت بنا دینے پر بھی وہ مستند ہوتا ہے تو مطلق یا غیر مشروط مستند کہلاتا ہے۔ اس کے خلاف دوسرے سلسلے مشروط مستند

کہلاتے ہیں۔

مثلاً ۱۔ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ مطلق مستدق ہے اس لیے کہ
سے کی توضیحی مثال (۱)

یعنی ۱ + $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ مستدق ہے۔

تبادل سلسلہ ۱۔ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ مشروط مستدق ہے
اس لیے کہ

مربعی سلسلہ ۱ + $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ متع ہے۔

پس واضح ہے کہ ایسا سلسلہ جو بعض مثبت اور بعض منفی رقموں پر مشتمل ہے
مستدق ہے اگر اس کی تمام علامتوں کو مثبت میں تبدیل کرنے سے جو سلسلہ
ماہل ہوتا ہے مستدق ہے۔

مثالیں

مندرجہ ذیل سلسلوں کے مستدق یا متع ہونے کا امتحان کرو۔

(۱) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ [جواب ۴ = ۰ اس لیے سلسلہ مستدق ہے]

(۲) $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \dots$ [جواب ۴ = ∞ اس لیے سلسلہ متع ہے]

(۳) $\frac{1}{2.0} + \frac{1}{3.0} + \frac{1}{4.0} + \dots$ جس میں ۲۰۱ = ۱ مضروب ۲ وغیرہ

[اشارہ ۴ = ۱ اس لیے امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمائش ناکا مینا]

لیکن چونکہ ک۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ مستند ہے اور
سلسلہ زیر امتحان کی ہر رقم اس ک۔ سلسلہ کی متناظر رقم سے کمتر ہے
اس لیے وہ بھی مستند ہے [

$$(۴) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \text{جواب} = \text{مربع}$$

$$(۵) \quad \dots + \frac{1}{(1+0.2)} + \dots + \frac{1}{0.5.3} + \frac{1}{0.3} + \frac{1}{3}$$

$$(۶) \quad \frac{1}{\text{لوک ۲}} - \frac{1}{\text{لوک ۳}} + \frac{1}{\text{لوک ۴}} - \frac{1}{\text{لوک ۵}} + \dots = \text{جواب} = \text{مستند} \quad [\text{جواب} = \text{مستند}]$$

۷۔ قوتی سلسلہ (Power Series) ایسا سلسلہ

جس کی رقمیں یک رقمی اور کسی متغیر مثلاً x کی صعودی صحیح عددی قوتوں پر
مستند ہوں جیسے

$$(۱) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

جس میں سر $1, x, x^2, x^3, \dots$ متغیر x کے غیر تابع ہوں
لا کا قوتی سلسلہ کہلاتا ہے۔ احصاء میں ایسے سلسلوں کی بڑی اہمیت ہے۔
لا کا قوتی سلسلہ x کی چند قیمتوں کے لیے مستند ہو سکتا ہے یا کسی قوت کے لیے نہیں
بجڑا۔ زیادہ لا کی چند قیمتوں کے لیے جو صفر سے مختلف میں مستند ہو سکتا ہے اور
دوسری قیمتوں کے لیے صحیح ہم سلسلہ (۱) کا صرف اس صورت میں امتحان کرینگے۔
جبکہ اس کے سر ایسے ہیں کہ

$$L = \left(\frac{1}{1+x} \right)^n$$

جس میں L ایک معین عدد ہے۔ اس کی وجہ معلوم کرنے کے لیے سلسلہ
مستند رہے بالا یعنی (۱) کی پہلی رقم کو چھڑ کر کاوشی کی امتحانی نسبت

(مصرعہ منق) پر تیار کرو۔

$$\text{نسبت} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1}$$

پس لا کی کس معین قیمت کے لیے

$$\text{سرا} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1}$$

اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں :

صورت (۱) اگر $1 = 0$ ۔ تو سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے
مستحق ہوگا اس لیے کہ $0 = 0$ ۔

صورت (۲) اگر $1 < 0$ صفر نہیں ہے تو سلسلہ مستحق ہوگا جبکہ
لال (= سرا) اکائی سے عدد اکثر ہے۔ یعنی

$$\text{لا وقفہ (interval) : } -\frac{1}{1} > 1 > \frac{1}{1} \text{ میں واقع ہے}$$

اور لا کی اس وقفہ سے باہر والی قیمتوں کے لیے قسح ہوگا۔

اس وجہ سے استمداق کے سروں کے نقطوں کا علاوہ طور پر امتحان
کیا جانا چاہیے۔ کسی دیے ہوئے سلسلہ کے لیے امتحانی نسبت تیار
کر لی جانی چاہیے اور مسد کے ذریعہ وقفہ استمداق کی تعیین

توضیحی مثال - سلسلہ $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$ کے
وقفہ استمداق کی تعیین کرو۔

$$\text{حل - امتحانی نسبت} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1}$$

$$\text{اور} \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1} = \frac{1+n}{1}$$

پس سلسلہ مستحق ہوتا ہے جبکہ $1 > 1$ اور قسح جبکہ $1 < 1$ ۔ سلسلہ

رجحان نہیں معلوم ہو سکتا جبکہ $| \lambda | = 1$ اس لیے کہ ایسی صورت میں استثنائی نسبت سے کوئی مدد نہیں ملتی۔ پس سلسلہ میں $\lambda = 1$ اتویض کر کے جب اس کا معائنہ کرتے ہیں تو

موسیقی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ دستیاب ہوتا ہے جو ∞ کی توضیحی مثال (ب) میں قسح دریافت ہوا۔

اب $\lambda = -1$ لکھنے سے $[-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots]$ حاصل ہوتا ہے۔

یہ سلسلہ متبادل ہے اس کی ہر رقم اس کی سابقہ رقم سے عدد اکثر ہے اور نہ ویسا رقم کی انتہا جبکہ $n \rightarrow \infty$ صفر ہے۔ پس از روئے ∞ وہ متناہی ہے۔ سلسلہ کا وقفہ استدقاق اب مکمل معلوم ہو گیا۔ اس کو یا تو بذریعہ

$$-1 \leq \lambda < 1$$

ظاہر کیا جاسکتا ہے یا ذیل کی ترسیم کے موٹے خط سے۔



واضح ہو کہ اس ترسیم میں نقطہ $\lambda = 1$ کے گرد ایک دائرہ کھینچا گیا ہے تاکہ یہ بتائے کہ قیمت 1 وقفہ استدقاق سے خارج ہے۔

مثالیں

مندرجہ ذیل سلسلے متغیر کی کن قیمتوں کے لیے متناہی ہیں دریافت کرو۔

(۱) $1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^3}{4} + \dots$ [جواب: $-1 \leq \lambda < 1$]

(۲) $1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^3}{4} + \dots$ [جواب: $-1 < \lambda \leq 1$]

$$(۳) \quad 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \quad [\text{جواب} - 1 > 1 > 1] \quad \left[\begin{array}{c} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} \right]$$

$$(۴) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \quad [\text{جواب لاکھ تمام قیمتوں کے لیے}] \quad \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ \rightarrow \end{array} \right]$$

$$(۵) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \quad [\text{جواب لاکھ تمام قیمتوں کے لیے}] \quad \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ \rightarrow \end{array} \right]$$

$$(۶) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + 1 \quad [\text{جواب} - 1 \geq 1] \quad \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ | \\ \rightarrow \end{array} \right]$$

۵۔ سلسلہ ثنائی —

$$\text{یہ اہم سلسلہ } 1 + m + m^2 + m^3 + \dots + \frac{m^2(1-m)(1-m^2)}{2 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{m^3(1-m)^2}{2 \cdot 1} + \dots$$

$$+ \frac{m^4(1-m)(1-m^2)(1-m^4)}{4 \cdot 2 \cdot 1} + \dots (1)$$

جس میں m ایک مستقل ہے۔

اگر m ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (۱) ایک محدود سلسلہ $m + 1$ رتوں کا ہے اس لیے کہ m جس رقم میں شامل ہے اس کے بعد کو آنے والی تمام رتوں میں جسز و ضربی (م - م) شمار کنندہ میں موجود ہوگا اور اس لیے وہ سب منعدم ہو جائیں گی۔ اس صورت میں سلسلہ (۱) نتیجہ ہے $(1 + m)$ کو m - وین قوت تک بند کرنے کا۔ اگر m ایک مثبت صحیح عدد نہ ہو تو سلسلہ ناقنابہ ہے۔

سلسلہ (۱) کا جب اشتقاق کے لیے امتحان کیا جاتا ہے۔ تو

$$\frac{1 + m}{1} = \frac{(1 + m)(1 + m - 1)}{1} = \left(1 - \frac{1 + m}{1}\right) \quad 1$$

اور چونکہ $1 - \frac{1 + m}{1} = 1 - 1 = 0$ پس $0 = 1 - 1$

تو لا کی کسی معین قیمت کے لیے $\frac{n}{1+n} = \frac{1}{\infty} = 0 = (1-1)$ مر

اس کی دو صورتیں پیش آتی ہیں
صورت (۱) اگر مر = ۰ تو سلسلہ (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہے۔
صورت (۲) اگر مر صفر نہیں ہے تو سلسلہ (۱) مستحق ہوگا

وقفہ ۱۔ $\frac{1}{1+n} > 1 > \frac{1}{1+n}$ کے لیے۔

لا میں ایک مستحق تو فی سلسلہ حسابی عمل کے لیے موزوں ہوتا ہے جبکہ لا صفر نہیں ہے۔ سلسلہ (۱) اگر مستحق ہے تو مفید ہوتا ہے جبکہ لا پہلے ہی سے دی ہوئی معین قیمت کے قریب ہوتا ہے۔

توضیحی مثال۔ نامنہای سلسلہ ۱۔ $(1-1) + \frac{(1-1)}{2} + \frac{(1-1)}{3} + \dots$

کے استحقاق کا امتحان کرو۔

حل۔ پہلی رقم کو چھوڑ کر نسبت $\frac{n}{1+n} = \frac{1}{\infty} = 0 = (1-1)$ تیار کرو۔

$$\frac{n}{1+n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

پس $|1-1| = 0$ اور سلسلہ مستحق ہوگا جبکہ لا مابین صفر اور ۲ کے واقع ہوگا۔ سرے کا نشان $1 = 2$ بھی شامل ہو سکتا ہے۔

مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) $0.999\dots$ کی تقریبی قیمت اشاریہ کے چھٹے مقام تک صحیح ہے ۲۵۵.۹۹۸۰۱

۱۰۰.۶۴۲ ہے

ایضاً

$$\frac{1}{1.01} = 0.990099\dots$$

متغیر کی کن قیمتوں کے لیے مندرجہ ذیل سلسلے متدرج ہیں؟

$$(۳) ۱ - ۲(۱ - \lambda) + ۳(۱ - \lambda)^2 - ۴(۱ - \lambda)^3 + \dots \text{ [جواب } = ۰ > \lambda > ۲]$$

$$(۴) ۱ + (۱ - \lambda) + \frac{(۱ - \lambda)^2}{۲} + \frac{(۱ - \lambda)^3}{۳} + \frac{(۱ - \lambda)^4}{۴} + \dots \text{ [جواب } = ۱ \leq \lambda \leq ۲]$$

$$(۵) ۱ + \frac{(۱ - \lambda)^2}{۲} - \frac{(۱ - \lambda)^3}{۳} + \frac{(۱ - \lambda)^4}{۴} - \frac{(۱ - \lambda)^5}{۵} + \dots \text{ [جواب = تمام قیمتوں کے لیے]}$$



اٹھارہواں باب

تفاعلوں کا پھیلاؤ۔ میکلارن اور نیلر کے سلسلے

۱۔ اس باب میں بتایا جائیگا کہ کسی تفاعل کو قوتی سلسلہ میں کس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے یا اگر تفاعل کسی اور طرح سے ظاہر کیا گیا ہے تو اس کو قوتی سلسلہ میں کس طرح پھیلایا جاسکتا ہے۔ واضح ہے کہ ایک مستحق قوتی سلسلہ لا میں وقفہ استدقاق کے اندر کی تمام قیمتوں کے لیے لا کا تفاعل ہے۔ پس ہم لکھ سکتے ہیں:

$$ف(لا) = ۱ + ۱لا + ۱لا^۲ + + ۱لا^n + (۱)$$

اس لیے اگر کوئی تفاعل قوتی سلسلہ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے تو اس کے سروں ۱، ۱لا، ۱لا^۲، ۱لا^n کی کیا شکل مہنی چاہیے معلوم کرنے کے لیے یہ عمل کیا جاتا ہے:

$$(۱) \text{ میں } لا = ۰ \text{ لکھو تب } ف(۰) = ۱ + ۰ + ۰ + + ۰ + (۲)$$

اس طرح (۱) کا پہلا سر دریافت ہو جاتا ہے۔ اب فرض کرو کہ سلسلہ مندرجہ (۱) رقم بہ رقم تفریق کیا جاسکتا ہے۔ عملی تفریق اس طرح بار بار کیے چلے جانے سے

$$\begin{aligned} ف(لا) &= ۱ + ۱لا + ۱لا^۲ + + ۱لا^n + \\ ف(لا) &= ۱ + ۱لا + ۱لا^۲ + + ۱لا^n + \\ ف(لا) &= ۱ + ۱لا + ۱لا^۲ + + ۱لا^n + \end{aligned} \quad (۳)$$

وغیرہ وغیرہ

تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرنے کے لیے یہ ضروری اور کافی ہے کہ

نصاب = (۶)

عموماً (جیسا کہ سابقہ باب میں کیا گیا) وقفہ استدقاق کی تعیین آسان تر ہے بہ نسبت وقفہ شرط مند جبہ (۶) کی تعیین کے لیکن سادہ صورتوں میں دونوں متماثل ہیں۔

واضح ہے کہ کسی تفاعل ف (لا) کو قوتی سلسلہ (۱) کے ذریعہ تعبیر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تفاعل اور اس کے تمام رتبوں کے مشتقات محدود ہوں۔ لیکن یہ کافی نہیں ہے۔

میکلاؤن کے سلسلے کے ذریعے جن تفاعلوں کی تعبیر نہیں ہو سکتی ان میں لوک لا اور حم لا بطور مثال پیش کیے جاسکتے ہیں اس لیے کہ یہ دونوں نامتناہی ہو جاتے ہیں جبکہ لا صفر ہوتا ہے۔

سلسلہ (۱) کا استعمال عملی حسابوں میں جن میں اعشاریہ کے ایک معین مقام تک حساب کی صحت مطلوب ہے بڑی اہمیت رکھتا ہے۔ واضح ہے کہ اس کے لیے سلسلہ کی رتبوں کی کافی تعداد لی جانی چاہیے۔

توضیحی مثال (۱) جم لا کو ایک نامتناہی قوتی سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ اور دریافت کرو کہ لا کی کن قیمتوں کے لیے یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

حل - پہلے تفرق کرو اور پھر لا = لکھو۔

ف (لا) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

ف (۱) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

ف (۲) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

ف (۳) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

وغیرہ

ف (لا) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

ف (۱) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

ف (۲) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

ف (۳) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱

وغیرہ

ان کو (۱) میں تعویض کرنے سے $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$
 سابقہ باب کی فصل (۱) کی مثال (۵) سے واضح ہے کہ یہ سلسلہ لاکھ تمام قیمتوں کے
 لیے مستحق ہے۔

اس طرح جب $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$
 جو [از روئے مثال (۶) باب و فصل مذکورہ بالا] لاکھ تمام قیمتوں کے لیے
 مستحق ہے۔

جم لا اور جب لا کے سلسلوں میں آسانی بتایا جاسکتا ہے کہ جیسے جیسے
 ن ناقصا ہی ہوتا ہے باقی ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے، لا کی خواہ کوئی
 معین قیمت ہو۔ چنانچہ

جم لا کے سلسلہ میں ہم ن۔ وان مشتق شکل ف (۱) (لا) = جم (لا + $\frac{1}{2}$)
 کہہ سکتے ہیں۔

پس ب = جم (لا + $\frac{1}{2}$) (لا) ہے

جم (لا + $\frac{1}{2}$) کبھی عددی قیمت میں اکائی سے بڑا نہیں ہوتا ہے۔ معجزا
 ب کا دوسرا جز و ضربی سلسلہ

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ میں ن۔ ویں رقم ہے
 جو لاکھ تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہے۔ پس وہ صفر کو پہنچتا ہے جیسے جیسے ن
 ناقصا ہی ہوتا ہے۔ پس شرط مندرجہ (۶) پوری ہوتی ہے۔

توضیحی مثال (۲)۔ لا کو میکلاڈن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ
 اور بتاؤ کہ وہ کب مستحق ہوتا ہے۔

حل - فرض کو

$$ف (لا) = ف (۰) + ف (۱) \frac{لا}{۱} + ف (۲) \frac{لا^۲}{۲!} + \dots + ف (۵) \frac{لا^۵}{۵!} + \dots$$

$$ف (لا) = لا \therefore ف (۰) = ۱ \quad ف (لا) = لا \therefore لا \text{ کو } ۱ \text{ ف (۰) کو } ۱$$

$$ف (لا) = لا \therefore لا \text{ کو } ۱ \therefore ف (۱) = ۱ \text{ (لا کو } ۱) \therefore ف (۲) = لا \text{ (لا کو } ۱) \therefore ف (۳) = لا^۲ \text{ (لا کو } ۱) \therefore ف (۴) = لا^۳ \text{ (لا کو } ۱) \therefore ف (۵) = لا^۴ \text{ (لا کو } ۱)$$

$$\text{اور } ف (لا) = لا \text{ (لا کو } ۱) \therefore ف (۵) = لا^۴ \text{ (لا کو } ۱)$$

$$\text{پس } ۱ = ۱ + \frac{لا}{۱} + \frac{لا^۲}{۲!} + \dots + \frac{لا^۵}{۵!} + \dots$$

$$ن \text{ رقموں کے بعد اس سلسلہ کا باقی ب} = \frac{لا^۶}{۶!} \text{ (لا کو } ۱) \therefore لا$$

لا چونکہ لا سے کتر ہے محدود ہے اور ن کی قیمت جب انتہائی بڑی ہوتی ہے تو $\frac{لا^۶}{۶!}$ اتنا ہی چھوٹا ہوتا ہے۔ پس ن کو کافی بڑا لینے سے باقی ب ناقابل لحاظ رہ جاتا ہے اس لیے کہ یہ سلسلہ مستحق ہے

[واضح ہو کہ ا کے بجائے اگر و اساس بنایا جائے

$$و = ۱ + \frac{و}{۱} + \frac{و^۲}{۲!} + \dots + \frac{و^۵}{۵!} + \dots$$

$$\text{اور اگر لا} = ۱ \text{ تو } ۱ = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots + \frac{۱}{۵!} + \dots = ۲.۷۱۸۲۸ \dots$$

جیسا کہ جبر و مقابلہ کی کتاب میں بتایا گیا ہے]

توضیحی مثال (۳) کوک (لا + لا) کو پھیلاؤ جبکہ $۱ > لا > ۱$

$$\text{حل - } ف (لا) = لا \text{ کوک } (لا + لا) \therefore ف (۰) = لا \text{ کوک } (۱) = ۰$$

مثالیں

میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ مندرجہ ذیل پھیلاؤ حاصل کرو اور دریافت کرو کہ متغیر کی کن قیمتوں کے لیے یہ پھیلاؤ مستقیم ہے:

$$(1) \text{ لوگ } (1 - \lambda) = 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} - \dots - \frac{\lambda^n}{n} \dots \dots \dots [1 - \lambda \geq 1]$$

$$(2) \text{ جب } \lambda = 1 = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4} - \dots + \frac{1 - (-1)^{n+1} (1 - \lambda)^n}{(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) \dots (n - \lambda)} \dots \dots \dots [1 - \lambda \geq 1]$$

$$(3) \text{ سن } \lambda = 1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} + \dots + \frac{1 - (-1)^{n+1} (1 - \lambda)^n}{1 - \lambda} \dots \dots \dots [1 - \lambda \geq 1]$$

$$(4) \text{ جب } \left(\frac{\pi}{2} + \lambda \right) = \frac{1}{\frac{1}{2} + \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \lambda} - \frac{\lambda}{\frac{1}{2} + \lambda} + \frac{\lambda^2}{\left(\frac{1}{2} + \lambda \right)^2} - \frac{\lambda^3}{\left(\frac{1}{2} + \lambda \right)^3} + \frac{\lambda^4}{\left(\frac{1}{2} + \lambda \right)^4} - \dots \dots \dots \left[\text{تمام قیمتوں کے لیے} \right]$$

$$(5) \text{ لوگ } (\lambda + 1) = \lambda + 1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \dots - \frac{1 - (-1)^{n+1} (1 - \lambda)^n}{1 - \lambda} \dots \dots \dots [1 - \lambda \geq 1]$$

$$(6) \text{ مس } \lambda \text{ کے پھیلاؤ کی پہلی چار رقیں } \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4} \dots \dots \dots \text{ ہیں۔}$$

$$(7) \text{ قطب } \lambda = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{8} + \dots \dots \dots \text{ ہیں۔}$$

$$(8) \text{ سن } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^3}{4} + \dots \dots \dots$$

$$(9) \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \lambda \right)} = 1 - \frac{\lambda}{\frac{1}{2} + \lambda} + \frac{\lambda^2}{\left(\frac{1}{2} + \lambda \right)^2} - \frac{\lambda^3}{\left(\frac{1}{2} + \lambda \right)^3} + \dots \dots \dots$$

$$(10) \text{ لوگ جم } \lambda = \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^4}{4} - \dots \dots \dots$$

۷۔ نا متناہی سلسلوں کے ساتھ عمل۔

جبر و مقابلہ اور اصلہ کے بہت سے عمل مستحق سلسلوں کے ساتھ کیے جاسکتے ہیں۔ بعینہ اس طرح جس طرح کہ کثیر رتقی جلوں کے ساتھ۔ اس ضمن میں مندرجہ ذیل امور بلا ثبوت قلمبند کیے جاتے ہیں:-

$$\text{فرض کرو } ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ = ۱$$

اور $۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ = ۱$ مستحق قوتی سلسلے ہیں۔ ہم حسب ذیل طریقوں سے ایسے نئے مستحق قوتی سلسلے حاصل کر سکتے ہیں:

(۱) رقم بر رقم جمع (یا تفریق) کرنے سے

$$(۱ \pm ۱) + (۱ \pm ۱) + \dots + (۱ \pm ۱) = ۱$$

(۲) رقموں کو ضرب دینے اور ضرب کرنے سے

$$۱ \times ۱ + ۱ \times ۱ + \dots + ۱ \times ۱ = ۱$$

توضیحی مثال (۱) لوکارقوں کا حساب۔ سلسلوں

$$\text{لوک } ۱ = (۱ + ۱) = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

$$\text{لوک } ۱ = (۱ - ۱) = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$$

تفاظ رقموں کی باہمی تفریق سے حاصل ہوتا ہے نیا سلسلہ

$$\text{لوک } ۱ = \frac{۱+۱}{۱-۱} = ۲ (۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots) \dots \dots (۱)$$

یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے جبکہ $۱ > ۱$
(۱) کو حسابی عمل کے لیے موزوں تر شکل میں تبدیل کرنے کی غرض سے
فرض کرو ۱ اور ۱ دو مثبت اعداد ہیں جن میں $۱ < ۱$ تب لکھو

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{م-ن}{م+ن} = \frac{لا+۱}{لا-۱} \text{ پس}$$

واضح ہے کہ مر اور ن کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے $لا > ۱$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{م}{م+ن} = ۱ - \frac{م-ن}{م+ن} = ۱ - \left[\frac{۱}{۵} \left(\frac{م-ن}{م+ن} \right) + \frac{۱}{۴} \left(\frac{م-ن}{م+ن} \right) + \dots\dots\dots \right]$$

یہ سلسلہ مر اور ن کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے مستحق ہوتا ہے اور حسابی عمل کے لیے بہت سوزوں ہے۔

توضیحی مثال (۲) مولا جب لا کا قوتی سلسلہ معلوم کرو۔

$$\text{حل۔ چونکہ } \left. \begin{aligned} \text{جب لا} = لا - \frac{لا^۲}{۴} + \frac{لا^۳}{۱۲} - \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \text{ [توضیحی مثال (۱)]}$$

$$\text{اور } \left. \begin{aligned} \text{مولا} = لا + ۱ + \frac{لا}{۴} + \frac{لا^۲}{۹} + \frac{لا^۳}{۲۲} + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \text{ [توضیحی مثال (۲)]}$$

ان سلسلوں کو باہم دیگر ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مولا جب لا} = لا + لا^۲ - \frac{لا^۳}{۴} + \frac{لا^۴}{۱۶} - \dots\dots\dots \text{ رقوم جن میں لا وغیرہ ہیں۔}$$

(۳) تقسیم کرنے سے۔ یہاں اس کی ایک خاص صورت بطور مثال پیش کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال (۳) جم لا کے سلسلہ کی مدد سے قط لا کا سلسلہ

تیار کرو۔

$$\text{حل۔ جم لا} = لا - ۱ + \frac{لا}{۱۱} - \frac{لا^۲}{۱۱} + \frac{لا^۳}{۱۱} - \dots\dots\dots$$

چونکہ قط لا = $\frac{۱}{جم لا}$ اکائی کو مندرجہ بالا سلسلہ پر تقسیم کرنے سے قط لا کا سلسلہ حاصل ہو جاتا ہے۔ اس کے لیے اچھا طریقہ یہ ہے کہ جم لا = ۱ - ی

کھس جائے تو

$$(۴) \dots\dots\dots -\frac{لا^۱}{۲۰} + \frac{لا^۲}{۲۲} - \frac{لا^۳}{۲} = ی$$

$$(۵) \dots\dots\dots |>| لا + ی + ی + ی + ۱ = \frac{۱}{ی-۱} = اور قط لا$$

پس سلسلہ (۴) سے

$$ی = \frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۱}{۲۲} + لا کی بند تر قوتوں کی رقیں$$

$$ی = \dots\dots\dots + \frac{لا^۱}{۲۰}$$

سلسلہ (۵) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جواب

$$قط لا = ۱ + \frac{۱}{۲} لا + \frac{۵}{۲۲} لا^۲ + \frac{۶۱}{۲۰} لا^۳ + \dots$$

مثالیں

(۱) لوک ۲ = ۰.۶۹۳۱۵، لوک ۳ = ۱.۵۹۸۶۱ دیے جاتے ہیں ان کی

مدد سے لوک ۴ اور لوک ۱۱ کو محسوب کرو۔ [جواب لوک ۴ = ۰.۶۹۳۵۹۱، لوک ۱۱ = ۲.۳۹۷۹۰]

مندرجہ ذیل سلسلوں کی تصدیق کرو:—

$$(۲) \dots\dots\dots + \frac{ط^۱۳}{۴۲} + \frac{ط^۲}{۲} - \frac{ط^۱}{۲} + ط - ۱ = \frac{ط}{ط+۱}$$

$$(۳) \dots\dots\dots + \frac{ع^۵}{۳} - \frac{ع^۲}{۲} + ع - ع = ع$$

$$(۴) \dots\dots\dots + \frac{ط^۱۳}{۶} + \frac{ط^۲}{۳} - \frac{ط^۱}{۳} = ط$$

$$(۵) \dots\dots\dots + \frac{لا^۱۳}{۸} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۲}{۲} + ۱ = \frac{لا}{لا+۱}$$

ان قیمتوں کو سلسلہ (۱) میں درج کرنے سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$ف (لا) = ف (۱) + ف (۱) \frac{(لا-۱)}{۱} + ف (۱) \frac{(لا-۱)^۲}{۱ \cdot ۲} + \dots + ف (۱) \frac{(لا-۱)^{۱۰}}{۱ \cdot ۱۰} \dots (ب)$$

یہ سلسلہ ٹیلر کا سلسلہ یا مسئلہ کہلاتا ہے۔

[نوٹ۔ یہ مسئلہ پیپر، اکثر بروک ٹیلر (صفحہ ۳۱۰) نے اپنی کتاب

میتھاڈس آف ریمنڈنٹورم ممبر لندن سائنس میں شائع کیا تھا۔]

اب ہم (ب) پر تنقیدی نظر ڈالینگے۔ دسویں باب کی فصل (۱۰) متعلق وسیع تر مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ (ز) میں ب = لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$ف (لا) = ف (۱) + ف (۱) \frac{(لا-۱)}{۱} + ف (۱) \frac{(لا-۱)^۲}{۱ \cdot ۲} + \dots + ف (۱) \frac{(لا-۱)^{۱۰}}{۱ \cdot ۱۰} \dots (۲)$$

$$[۱ > ۱ > لا] \quad ف (۱) \frac{(لا-۱)^{۱۰}}{۱ \cdot ۱۰}$$

رقم ب کو ن رقموں کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔
(۲) کے بائیں جانب کا سلسلہ ٹیلر کے سلسلہ (ب) کے ساتھ ن رقموں تک مطابق ہوتا ہے۔ ان رقموں کے حاصل مجموعہ کو سن سے تعبیر کرو تو (۲) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$ف (لا) = سن + ب یا ف (لا) - سن = ب$$

اب مانو کہ ایک معین قیمت لا = لا کے لیے باقی ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے جبکہ ن نامتناہی ہوتا ہے۔ تب

$$نہیں سن = ف (لا) \dots \dots \dots (۳)$$

اور سلسلہ (ب) مستحق ہوتا ہے لا = لا کے لیے اور اس کی قیمت ہے ف (لا)

مسئلہ۔ نامتناہی سلسلہ (ب) تفاعل کو لا کی ان قیمتوں کے لیے اور صرف ان ہی قیمتوں کے لیے تعبیر کرتا ہے جن کے لیے باقی صفر کو پہنچتا ہے جیسے جیسے رقموں کی تعداد بڑھتی جاتی ہے۔

اگر سلسلہ لا کی ایسی قیمتوں کے لیے متدق ہوتا ہے جن کے لیے باقی صفر کو نہیں پہنچتا جیسے جیسے کہ ن بلا انتہا بڑھتا جاتا ہے تو لا کی ایسی قیمتوں کے لیے سلسلہ تفاعل ف (لا) کو تعبیر نہیں کرتا۔

عام طور پر سلسلہ کا وقفہ استقامت دریافت کر لینا زیادہ آسان ہے نسبت باقی کے صفر کو پہنچنے کے وقفہ کے۔ لیکن سادہ صورتوں میں دونوں وقفے متماثل ہیں۔

جب کسی تفاعل اور اس کے متوازن مشقات کی قیمتیں متغیر کی کسی معین قیمت مثلاً لا کے لیے معلوم اور محدود ہیں تو لا کی اُن کے قرب و جوار کی قیمتوں کے لیے سلسلہ (ب) اس تفاعل کی قیمت دریافت کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ اور (ب) کو ف (لا) کا پھیلاؤ لا = ۲ کے قرب و جوار میں بھی کہتے ہیں۔

توضیحی مثال (۱) لوک لا کو (لا-۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

حل۔ ف (لا) = لوک لا ' ∴ ف (۱) = ۰.

$$ف (لا) = \frac{1}{لا} \therefore ف (۱) = ۱$$

$$ف (لا) = -\frac{1}{لا^2} \therefore ف (۱) = -۱$$

$$ف (لا) = \frac{۲}{لا^3} \therefore ف (۱) = ۲ \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

ان کو سلسلہ (ب) میں تعویض کرنے سے لوک (لا) = $\frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا^2} + \frac{۲}{لا^3} - \frac{۱}{لا^4} + \frac{۱}{لا^5} - \frac{۲}{لا^6} + \dots$

$$= (لا-۱) \frac{۱}{لا} + (لا-۱)^2 \frac{۱}{لا^2} + (لا-۱)^3 \frac{۱}{لا^3} + \dots$$

یہ سلسلہ لاکھیا صفر اور ۲ کے مابین قیمتوں میں مستحق ہوتا ہے اور لوک لاکھا
لا = ۱ کے قریب وجہ میں پھیلاؤ ہے۔

توضیحی مثال (۲) جم ط کو (ط - ط) کی قوتوں میں چار قوتوں تک پھیلاؤ۔

حل - ف (ط) = جم ط ' ف (ط) = $\frac{\pi}{4}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ف (ط) = جيب ط، ف $(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$$f^{\circ}(p) = \text{جم } p, \quad f^{\circ}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

فت (ط) = جب ط ف (ف) = $\frac{1}{2\pi}$ وغیرہ وغیرہ

پس سلسلہ جمع ط = $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$

$$\left[\dots \left(\frac{\pi}{r} - 1 \right) \frac{1}{r} + \left(\frac{\pi}{r} - 2 \right) \frac{1}{r} - \left(\frac{\pi}{r} - 3 \right) \frac{1}{r} = \right.$$

۵۔ ٹیلر کے سلسلہ کی ایک دوسری شکل۔

اگر سابقہ فصل کے سلسلہ (ب) میں بجائے ۱ کے لاکھیں اور لا = ۱ = ۲
مانیں یعنی لا = ۱ + ۲ = لا + ۲ تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے :

$$f(l+m) = f(l) + f(m) + \frac{f(l)f(m)}{2} + \dots$$

ف (٥) (لا) ٥ (ج)

اس نئی شکل میں ف (لا) کی نئی قیمت 'جبکہ لا بدلتا ہے' لائے لاء میں
 ہ کے ایک توفی سلسلہ میں پھیلائی جاتی ہے 'جو لا کا اضافہ ہے۔

توضیحی مثال۔ نوک (ا + ہ) کو ٹیلر کے سلسلے کے ذریعہ پھیلاؤ۔

اگر صرف پہلی رقم تک تقریبی قیمت محسوب کی جائے تو جب $\frac{1}{2} \text{ لا} = \dots\dots\dots$
 جب $\frac{1}{2} \text{ لا} = \frac{1}{2} \text{ لا}$ - دوسری

وغیرہ وغیرہ پہلی صورت میں باقی ماندہ سلسلہ کی قیمت عدد اس کی پہلی رقم $\frac{1}{2} \text{ لا}$ سے کمتر ہے۔ [سابقہ باب ۵]

یعنی جب $\frac{1}{2} \text{ لا} = \text{لا}$ ساتھ خطا $> \frac{1}{2} \text{ لا}$ یا $< \frac{1}{2} \text{ لا}$ ہم یہ دریافت کر سکتے ہیں کہ اس صورت میں لا کی کن قیمتوں کے وقفہ یا سمت کے لیے تقریبی قیمت اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح ہو سکتی ہے۔
 تب $\frac{1}{2} \text{ لا} > \text{لا}$ یعنی $\text{لا} > \frac{1}{2} \text{ لا}$ یا $\text{لا} < \frac{1}{2} \text{ لا}$ یعنی $\text{لا} < \frac{1}{2} \text{ لا}$ ۔
 پس جب $\frac{1}{2} \text{ لا} = \text{لا}$ اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح ہے جبکہ لا کی قیمت
 - ۰.۱۴۲۳ اور + ۰.۱۴۲۳ نیم قطریوں کے درمیان ہے یا بالفاظ دیگر
 - ۰.۱۴۲۳ اور + ۰.۱۴۲۳ کے درمیان ہے۔

توضیحی مثال (۲) ٹیلر کے سلسلہ سے مس لا کا تقریبی اضافہ
 دریافت کرو جبکہ لا کی قیمت ۴۵ سے بدل کر ۴۶ ہوتی ہے۔
 حل۔ ۱۔ مثال (۳) کی رو سے

مس (لا + ۴۵) = مس لا + قط لا ۴۵ + قط لا ۴۶ +
 اس مثال میں لا = ۴۵ اور مس ۴۵ = ۱ قط لا = ۲
 معذا ۴۵ = ۶ یا ۰.۱۴۲۵ نیم قطری

چونکہ ف (لا + ۴۵) - ف (لا) = ف (لا ۴۵) + ف (لا) $\frac{1}{2} \text{ لا} + \dots\dots\dots$
 تو یائیں جانب کے رکن کی طرف پہلی رقم لینے سے مس ۴۶ - مس ۴۵ = ۰.۱۴۲۵ = ۰.۱۴۲۵
 اور پہلی دو رقمیں = ۰.۱۴۲۵ = ۰.۱۴۲۵

پس اس دوسرے تقریبی حساب سے مس ۴۶ کی قیمت ۰.۱۴۲۵ برآمد ہوتی ہے

جو اشاریہ کے چوتھے مقام تک صحیح ہے۔

مثالیں

(۱) تقریبی ضابطہ جم طہ = ۱ - $\frac{1}{4}$ میں کس قدر صحت ہے جبکہ (۱) طہ = ۲۰

(ب) طہ = ۶۰ (ج) طہ = $\frac{1}{4}$ [جواب (۱) خطا > ۰.۰۰۳۲

(ب) خطا > ۰.۰۰۵ (ج) خطا > ۰.۰۲۵]

(۲) تقریبی ضابطہ قو = ۱ - لا میں کس قدر خطا شامل ہے جبکہ (۱) لا = ۱۰۱

(ب) لا = ۰.۵۵

(۳) ثابت کرو کہ سلسلہ ل کوک (۱-لا) فرلا کی تقریبی قیمت

$$= ج - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

(۴) تقریبی ضابطہ مس ($\frac{11}{4} + طہ$) = ۱ + ۲ طہ + ۲ طہ کی تصدیق کرو۔

اور اس کی مدد سے مس ۴۶ اور مس ۵۰ محسوب کر کے صحت کا مقابلہ مثلاً

جدولوں سے کرو۔

(۵) محدود تکملہ $\frac{1}{4}$ ل کوک (۱ + لا) فرلا دیا جاتا ہے۔

(۱) اس کی قیمت سلسلہ کے ذریعہ اشاریہ کے چار مقاموں تک محسوب کرو۔

[جواب = ۰.۰۰۰۹

(ب) اس کی قیمت راست تکمل کے ذریعہ اخذ کر کے (۱) کی تقریبی قیمت

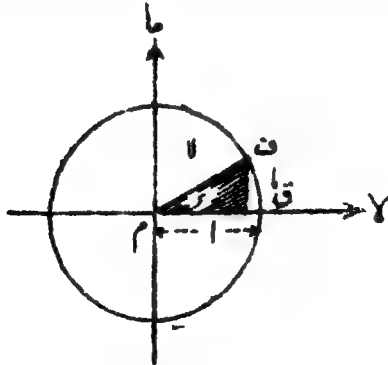
سے اس کا مقابلہ کرو۔

انیسواں باب

زائدی تفاعلوں کا تفرق اور تکمیل

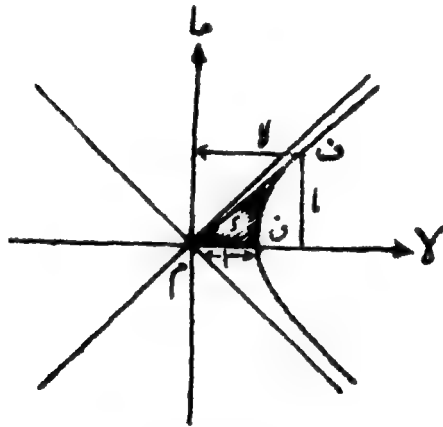
۱۔ - زائد تفاعلوں کی تعریف اور ان کے چند باہمی رشتے نصاب کی پہلی جلد کے آخری باب میں مختصراً بیان ہو چکے ہیں۔ یہ تفاعل بعض طبیعی اور میکانیکی مسائل کے حل میں بہت کارآمد ثابت ہوئے ہیں۔ یہاں ان کی ہندسی تعبیر کے بعد ان کے تفرق اور تکمیل کے نتائج قلمبند کیے جائیں گے۔

دائری اور زائدی تفاعلوں (یا نسبتوں) میں توافق۔ شکل ۹۳ میں اکائی نصف قطر م ق کا ایک دائرہ جس کی



شکل ۹۳

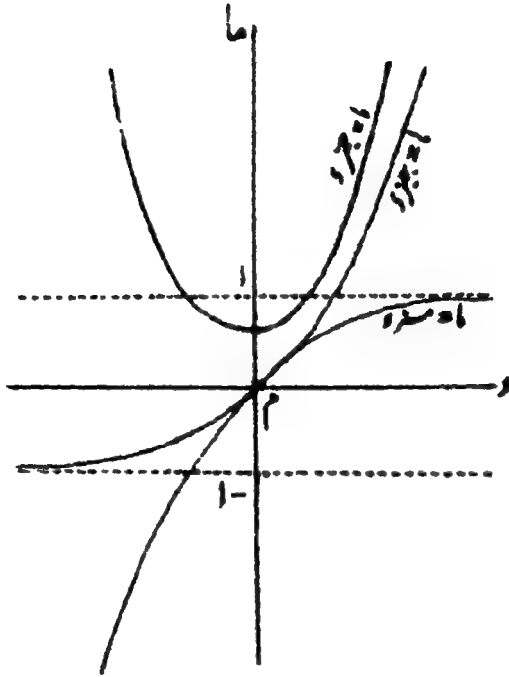
مساوات $لا + ما = ا$ ہے کہینچا گیا ہے۔ منحنی کے نقطہ ف (محدود لا، ما) میں سے ایک سمتی نیم قطر م ف بنایا گیا ہے۔
 قطاع دائرہ ق م ف کے رقبہ کا دو چند عدد زاویہ \angle = زاویہ ق م ف کے نیم قطروں کی تعداد کے مساوی ہے۔ پس اس رقبہ کے دو چند کو 'زاویہ' کی ناپ یا پیمائش تصور کر سکتے ہیں۔ اور
 جب $\angle = \frac{ما}{م ق} = ما'$ جم $\angle = \frac{لا}{م ق} = لا'$ مس $\angle = \frac{جیب}{م ق} = جیب'$ وغیرہ
 شکل ۱۲۰ میں نصف قاطع محور م ق = اکا ایک قائم یا متساوی الاضلاع قطع زائد کہینچا گیا ہے جس کی مساوات $لا - ما = ا$ ہے۔



شکل ۱۲۰

منحنی کے نقطہ ف (محدود لا، ما) میں سے ایک سمتی نیم قطر م ف بنایا گیا ہے۔ توافق کے لحاظ سے زائدی قطاع ق م ف کے رقبہ کے دو چند کو 'زاویہ' = زاویہ ق م ف کی ناپ یا پیمائش زائدی سمتی نیم قطروں میں تصور کر سکتے ہیں۔ اور

کے زائدی جیب کی تعریف: $\angle = \frac{ما}{م ق} = ما'$



شکل ۹۵

زاوی تقاطع کی مسرہ بالا مساواتوں کے تفیق سے آسانی بتایا جاسکتا ہے کہ

$$\begin{aligned} \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \text{ جہز} &= \text{جہز} \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \text{ جہز} &= \text{جہز} \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \text{ مسرہ} &= \text{قطر} \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \text{ جہز} &= \text{قطر} \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \text{ قطر} &= \text{مسنر} \frac{\text{فر}}{\text{فر}} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ قمر} = - \text{قمر} \text{ و } \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ قمر}$$

اور چونکہ جبراً = لوک $(s+1)$ و جبراً = لوک $(s-1)$

$$\pm \text{لوک} (s-1) =$$

$$\text{مسز} = \frac{1}{s-1} \text{ لوک} \quad \text{قمر} = \frac{1}{s-1} \text{ لوک}$$

$$\text{قمر} = \frac{1}{s-1} \text{ لوک}$$

$$\pm \text{لوک} (s+1) = \text{قمر} \text{ اور } \text{قمر} = \frac{1}{s+1} \text{ لوک}$$

ان کے تفریق سے آسانی بتایا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{1}{s-1} \pm = \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ جبر}$$

$$\frac{1}{s+1} = \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ جبر}$$

$$\frac{1}{s-1} = \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ مسز}$$

$$\frac{1}{s-1} = \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ مسز}$$

$$\frac{1}{s+1} = - \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ قمر}$$

$$\frac{1}{s+1} = - \frac{\text{فرز}}{\text{فرلا}} \text{ قمر}$$

$$\text{جبر} = \frac{\text{فرز}}{s-1}$$

$$\text{جبر} = \frac{\text{فرز}}{s+1}$$

$$\text{قمر} = - \frac{\text{فرز}}{s-1}$$

$$\text{مسز} = \frac{\text{فرز}}{s-1}$$

$$\text{قمر} = - \frac{\text{فرز}}{s+1}$$

توضیحی مثالیں

$$(1) \text{ فرلا} = \frac{\text{فرز}}{s+1}$$

حل - لا = اوجز و گھوٹب فرلا = اوجز و فری اور لا^۲ + ا^۲ = اوجز و

$$\text{پس } ا = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + \text{ا}} = ا \text{ فری} = س = \text{جنز}^۱ \frac{۱}{۲}$$

اس طرح لا = اوجز و گھوٹب سے $ا = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{ا}} = ا \text{ اوجز و فری} = ا \text{ فری} = س = \text{جنز}^۱ \frac{۱}{۲}$

(۲) $ا = \sqrt{\text{لا} + \text{ا}^۲}$ معلوم کرو

حل - لا = اوجز و اوجز و اوجز و فرلا = اوجز و فری

اور چونکہ ا + جنز و = جنز و

$$\therefore ا = \sqrt{\text{لا} + \text{ا}^۲} \text{ فرلا} = ا \text{ اوجز و فری} = \frac{۱}{۲} ا \text{ (جنز و} + ۱) \text{ فری} = \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا$$

$$= \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا = \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و}$$

$$\text{یا } \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} = \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} + \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و}$$

(۳) $ا = \sqrt{\text{لا} - \text{ا}^۲}$ معلوم کرو

حل - لا = اوجز و گھوٹب

تب فرلا = اوجز و فری اور چونکہ جنز و = ا - جنز و

$$ا = \sqrt{\text{لا} - \text{ا}^۲} \text{ فرلا} = ا \text{ اوجز و فری} = \frac{۱}{۲} ا \text{ (جنز و} - ۱) \text{ فری} = \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} - \frac{۱}{۲} ا$$

$$= \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} - \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} = \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و} - \frac{۱}{۲} ا \text{ جنز و}$$

مثالیں

(۱) جنز لا کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ [جواب = لا + $\frac{۱}{۳} لا$ + $\frac{۱}{۵} لا$ + ...]

$$(۲) \text{ جنرلا کو میکلارن کے مسئلہ کے ذریعہ پھیلاؤ } \left[\text{جواب} = 1 + \frac{\lambda^2}{1} + \frac{\lambda^2}{2} + \dots \right]$$

$$(۳) \text{ ثابت کرو کہ } \text{سنرلا فرلا} = \text{لوک جنرلا} + \text{ج}$$

$$(۴) \text{ جنرلا} = \text{لا} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^2}{5} \cdot \frac{3.1}{2.0.2} - \frac{\lambda^4}{6} \cdot \frac{5.3.1}{1.0.2.0.2} + \dots \left[\text{الا} > 1 \right]$$

$$(۵) \text{ سنرلا} = \text{لا} + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^4}{5} + \dots$$

بیسوال باب

جزوی تفسیق

۱۔ متعدد متغیروں کے تفاعل۔ تسلسل

ابتدائی ریاضی میں بھی ایسے تفاعلوں کی مثالیں بکثرت ملتی ہیں۔ جیسے
(۱) قائم مخروط کا حجم $E = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ لا، دو متبوع متغیروں کا تفاعل ہے
لا = دائری قاعدہ کا نصف قطر اور ما = اس کا ارتفاع۔

(۲) ترچھے مثلث کا رقبہ $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ لا، جب دو متبوع متغیروں کا تفاعل
لا اور ما مثلث کے دو ضلع ہیں اور ع ان کا درمیانی زاویہ

رابطہ سی = ف (لا، ما) (۱)
کو ایک سطح کے ذریعہ مرتسم کیا جاسکتا ہے۔ جو مساوات (۱) کا طریق
ہے جبکہ لا، ما سی قائم متحدہ تصور کیے جلتے ہیں۔ یہ سطح دو متغیروں
لا، ما کے تفاعل ف (لا، ما) کی ترسیم ہے۔

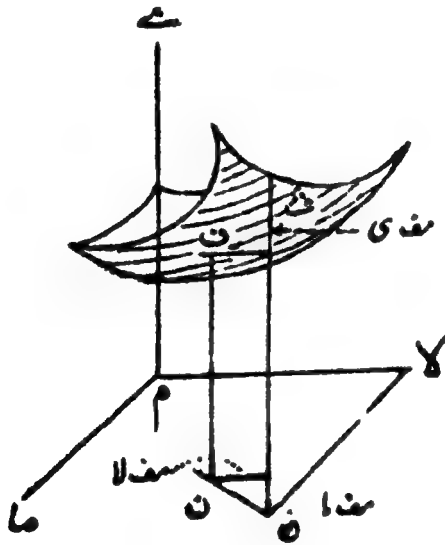
دو متبوع متغیروں لا، ما کے تفاعل ف (لا، ما) کی تعریف
کی جاتی ہے کہ وہ لا = ۱ اور ما = ب کے لیے مسلسل ہے جبکہ

نہیں ف (لا، ما) = ف (۱، ب) (۲)

لا اور ما اپنی اپنی انتہاؤں ۱ اور ب کو خواہ کسی بھی طرح پہنچ جائیں۔

تسلسل کی اس تعریف کو مختصراً ان الفاظ میں ادا کر سکتے ہیں کہ ایک یا دونوں متغیروں میں اگر ایک بہت ہی خفیف تبدیلی واقع ہو تو اس سے تفاعل کی قیمت میں بھی بہت ہی خفیف تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

شکل ۱۱ میں رابطہ (۱) یعنی $y = f(x, z)$ کی ہندی توضیح کی گئی ہے۔ سطح مرتسم کے نقطہ F پر غور کرو جس کا $z = 1$ اور $x = 1$ ہے۔



شکل ۱۱

ان متغیروں کے اضافوں کو $y = f(x, z)$ اور $z = 1$ سے نامزد کرو اور تفاعل y کے متناظر اضافہ کو $y = f(x, z)$ سے۔ نقطہ F کے محدود ہیں۔

$y = f(x, z)$ اور $z = 1$ سے

تفاعل کی قیمت ہے

$y = f(x, z)$ اور $z = 1$ سے

سطح کے ساتھ اس مستوی کے تقاطع سے جو منحنی ص ف ک بنتا ہے اس کی مساوات

ی = ف (لا، ب) ہوگی
اگر ہ و کو مے کا محور تصور کیا جائے اور ھ ح کو لا کا محور۔ اس مستوی میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ سے وہی مراد ہوگی جو $\frac{\text{فر ی}}{\text{ح لا}}$ سے ہوتی ہے۔

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{مس ن ط ف} = \text{منحنی تقاطع ص ک کی ڈھلان}$

نقطہ ف پر (۱)
اس طرح اگر مستوی ب ج د نقطہ ف میں سے مستوی مام مے کے متوازی کھینچا جائے تو اس کی مساوات ہوگی
 $\text{لا} = ۱$

اور منحنی تقاطع د ف ع کے لیے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ سے مراد وہی ہوگی

جو $\frac{\text{فر ی}}{\text{ح ما}}$ سے ہوتی ہے۔ پس

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{مس ن ط ف} = \text{منحنی تقاطع د ع کی ڈھلان نقطہ ف پر۔ (۲)}$

توضیحی مثال۔ مجسم ناقص نا $\frac{\text{لا}}{۱} + \frac{\text{ما}}{۲} + \frac{\text{ی}}{۳} = ۱$ کے

منحنیان تقاطع کی ڈھلاں دریافت کرو، (۱) نقطہ لا = د پر جبکہ مستوی ما = ھ مجسم کو قطع کرتا ہے، (۲) نقطہ ما = ز پر جبکہ مستوی لا = و اس کو قطع کرتا ہے۔ دونوں صورتوں میں ی مثبت مانا جائے۔
حل۔ (۱) ما کو مستقل تصور کرنے سے

$$\frac{\text{لا}}{۱} + \frac{\text{ی}}{۲} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \therefore \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{ی}}{۲} + \frac{\text{لا}}{۱}$$

$$\text{جب لا} = \text{د اور ما} = \text{ا تو ی} = \frac{\text{ا}^2 \text{ب} - \text{ب}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا}}{\text{ا}^2 \text{ب}}$$

$$\therefore \text{ی} = \pm \frac{\text{ج}}{\text{ا}^2 \text{ب}} \left[\text{ا}^2 \text{ب} - \text{ب}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا} \right] \text{اس لیے جنی} = \frac{\text{ب ج د}}{\text{ا}^2 \text{ا}^2 \text{ب} - \text{ب}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا}}$$

(۲) لا کو مستقل تصور کرنے سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}^2 \text{ج}}{\text{ج}^2 \text{ا}} = \frac{\text{ا}^2 \text{ج}}{\text{ج}^2 \text{ا}} = \frac{\text{ا}^2 \text{ج}}{\text{ج}^2 \text{ا}}$$

$$\text{جب لا} = \text{و اور ما} = \text{ز تو ی} = \frac{\text{ا}^2 \text{ب} - \text{ب}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا}}{\text{ا}^2 \text{ب}}$$

$$\therefore \text{ی} = \pm \frac{\text{ج}}{\text{ا}^2 \text{ب}} \left[\text{ا}^2 \text{ب} - \text{ب}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا} \right] \text{اس لیے جنی} = \frac{\text{و ج ز}}{\text{ا}^2 \text{ا}^2 \text{ب} - \text{ب}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا}}$$

مثالیں

ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{اگری} = \text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}$$

$$\text{تو جنی} = \frac{\text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}}{\text{ج}^2 \text{ا}}$$

$$(۲) \text{اگر لا} = \text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و} = \text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}$$

$$(۳) \text{اگر} = \frac{\text{لا} \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}}{\text{ا}^2 \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}}$$

$$(۴) \text{اگر} = \text{لا} \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و} = \text{لا} \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}$$

$$(۵) \text{اگر د} = \frac{\text{لا}^2 \text{ا} - \text{ا}^2 \text{ا}}{\text{لا} \text{ا} + \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{ا} + \text{د} \text{لا} + \text{ه} \text{ا} + \text{و}}$$

(۶) مجسم مکافی نمای = $\frac{لا}{۴} + ما$ میں منحنی تقاطع کی ڈھلان معلوم کرو
 (۱) نقطہ لا = ۲ پر جبکہ تقاطع مستوی ما = ۱ ہے (ب) نقطہ ما = ۱ پر
 جبکہ تقاطع مستوی لا = ۲ ہے۔ [جواب (۱) پر ۱، (ب) پر ۲]
 (۷) بتاؤ کہ سطح لا ما ی = ص کا جب مستوی ما = ۱ سے تقاطع
 ہوتا ہے تو نقطہ لا = ۱ پر تقاطع کے منحنی کی ڈھلان - ۱ ہے۔
۳۔ پورا تفرقہ۔ دو متغیروں لا، ما کے تفاعل

۱ = ص = ف (لا، ما) (۱)
 میں اگر لا، اور ما کو، علی الترتیب مف لا اور مف ما اضافہ حاصل
 ہو اور اس سے ص کا متناظر اضافہ مف ص ہو تو
 مف ص = ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما) (۲)
 اور ص کا پورا اضافہ کہلاتا ہے -
 (۲) کے بائیں جانب کے جملہ میں ف (لا، ما + مف ما) جمع اور تفریق
 کرنے سے

مف ص = [ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما)]
 + [ف (لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما)] (۳)
 (۴) کے بائیں جانب والے ہر دو تفاوتوں پر باب (۱) کے اوسط قیمت
 کے مسئلہ (د) کے اطلاق سے پہلا تفاوت
 ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما)

= ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما) (۴)
 [۱ = لا، مف لا = مف لا اور چونکہ لا بلتا ہے جبکہ ما + مف ما مستقل رہتا ہے]

اس لیے جزوی شتق بلحاظ ما حاصل ہوتا ہے [

اور دوسرا تفاوت

ف (لا' ما + مف ما) - ف (لا' ما) = ف (لا' ما + طم مف ما) مف ما .. (۵)

[ل = ما' مف ل = مف ما' اور چونکہ ما بدلنا ہے جبکہ لا مستقل رہتا ہے اس لیے

جزوی شتق بلحاظ ما حاصل ہوتا ہے]

(۳) میں ' (۴) اور (۵) سے توفیق کرنے سے

مف و = ف (لا' ما + طم مف لا' ما + مف ما) مف لا

+ ف (لا' ما + طم مف ما) مف ما (۶)

جس میں طم اور طم مثبت کسریں ہیں -

چونکہ ف (لا' ما) اور ف (لا' ما) متغیروں لا اور ما کے مسلسل

تفاعل ہیں (۶) میں مف لا اور مف ما کے سر علی الترتیب ف (لا' ما)

اور ف (لا' ما) کو بطور انتہا پہنچینگے جبکہ مف لا اور مف ما بطور مشترک

انتہاؤں کے صفر کو پہنچینگے - پس اگر صہ اور صہ ایسے صغائر تھے ہیں کہ

نبا صہ = . نبا صہ = .

ہم لکھ سکتے ہیں ف (لا' ما + طم مف لا' ما + مف ما) = ف (لا' ما) + صہ (۷)

ف (لا' ما + طم مف ما) = ف (لا' ما) + صہ (۸)

اور (۷) ہو جاتا ہے

مف و = ف (لا' ما) مف لا + ف (لا' ما) مف ما + صہ مف لا + صہ مف لا .. (۹)

تب ہم کے پورے تفرق (= فر و) کی حسب ذیل تعریف کرتے ہیں:

فر و = ف (لا' ما) مف لا + ف (لا' ما) مف ما (۱۰)

(۱۰) کے بائیں جانب کا رکن (۹) کے بائیں جانب کے رکن کا اصل حصہ ہے

یعنے فر و ایک بہت ہی قریب کی قیمت ہے مف و کی مف لا اور مف ما کی

۱۔ $\frac{\text{جف}^1}{\text{جف}^2} \text{ فرلا} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^1} \text{ فرما} = (1 - \text{لا}^2) \text{ فرلا} + (-\text{لا}^2 + 1) \text{ فرما}$
 ہر نئی قیمتیں تعویض کرنے سے اور یہ یاد رکھ کر کہ $\text{مف}^1 = \text{فرلا}$ اور $\text{مف}^2 = \text{فرما}$
 کی قیمت ۳۵۶ برآمد ہوتی ہے۔

توصیحی مثال (۲)۔

۱۔ $\text{قط}^1 = \frac{1}{\text{لا}}$ فرس دریافت کرو۔

فرس = $\frac{\text{جف}^1}{\text{جف}^2} \text{ فرلا} + \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^1} \text{ فرما}$

$$= \left\{ \frac{\text{جف}^1}{\text{جف}^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{لا}^2}} \cdot \frac{1}{\text{لا}} \right\} \text{ فرلا} + \left\{ \frac{\text{جف}^2}{\text{جف}^1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\text{لا}^2}} \cdot \frac{1}{\text{لا}} \right\} \text{ فرما}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{\text{لا}} \right) \cdot \frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2 - 1} \right\} \text{ فرلا} + \left\{ \left(\frac{1}{\text{لا}} \right) \cdot \frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2 - 1} \right\} \text{ فرما}$$

$$= \frac{\text{لا فرما} - \text{لا فرلا}}{\text{لا}^2 - 1} \quad \text{جواب}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا پورا تفرق معلوم کرو۔

$$(1) \quad \frac{\text{لا} + \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = 1 \quad \text{[جواب فرس} = \frac{\text{لا فرلا} + \text{لا فرما}}{\text{لا}^2 - \text{لا}^2}]$$

$$(2) \quad 1 = 1 \quad \text{[جواب فرس} = 1 \text{ جب فرس} + 1 \text{ جب فرس} + 1 \text{ جب فرس}]$$

$$(3) \quad 1 = 1 \quad \text{[جواب فرس} = 1 \text{ جب فرس} + 1 \text{ جب فرس} + 1 \text{ جب فرس}]$$

$$(4) \quad \text{اگر لا}^2 + \text{لا}^2 + \text{لا}^2 = 1 \text{ تو بتاؤ کہ فرس} = \frac{\text{لا فرلا} + \text{لا فرما}}{1}$$

$$(۵) \text{ تفاعل } = \text{ مس }^1 \left(\frac{1}{10} \right) \text{ تو بتاؤ کہ فرو } = \frac{\text{لا فرما} - \text{لا فرلا}}{\text{لا} + \text{لا}}$$

۴۔ پورے اضافہ کی تقریبی قیمت خفیف خطائیں

ضابطہ (ب) اور (ج) اضافہ مف و کی تقریبی قیمت محسوب کرنے میں استعمال کیے جاتے ہیں۔ مہذا جبکہ لا اور ما کی قیمتیں بذریعہ پیمائش یا تجربہ معلوم کی جاتی ہیں (اور اس لیے ان میں خفیف خطائیں مف لا اور مف ما نقص آلات یا نقص مشاہدہ کی وجہ سے سرایت کر جاتی ہیں) تو اس طرح سے تفاعل و کی قیمت میں صورت پذیر ہونے والی خطا کی تقریبی قیمت ضابطہ (ب) یا (ج) کے ذریعہ دریافت کر لی جاسکتی ہے۔

توضیحی مثال۔ ایک ترچھے مستوی مثلث کے ضلعوں کے طول پیمائش سے ۶۰ فٹ اور ۸۰ فٹ دریافت ہوئے اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۶۰۔ لیکن ضلعوں کی پیمائش میں ۱۰ فٹ اعظم خطا کی گنجائش تھی اور زاویہ کی پیمائش میں $\frac{1}{4}$ درجہ کی۔ ان پیمائشوں کی مدد سے مثلث کے تیسرے ضلع کا طول محسوب کرنے میں کیا تقریبی اعظم خطا اور فی صدی خطا ہو سکتی ہے معلوم کرو۔

$$\text{حل۔ جیب التمام کے اظہار سے } ی^2 = لا^2 + ما^2 - ۲ لا ما \cos ۵۶۰ \dots (۱)$$

$$\text{یہاں لا} = ۶۰ \text{ فٹ } ما = ۸۰ \text{ فٹ } ۵۶۰ = \frac{\pi}{3} \text{، فرلا} = \text{فرما} = ۵۰$$

$$\text{فرو} = ۵۰۰۸۶۳ \text{ نیم قطری}$$

$$(۱) \text{ کے جزوی تفرق سے } \frac{\text{جفت ی}}{\text{جفت لا}} = \frac{\text{لا} - \text{ما} \cos ۵۶۰}{ی} \text{، } \frac{\text{جفت ی}}{\text{جفت ما}} = \frac{\text{ما} - \text{لا} \cos ۵۶۰}{ی}$$

$$\frac{\text{جفت ی}}{\text{جفت لا}} = \frac{\text{لا} + \text{ما} \cos ۵۶۰}{ی}$$

$$\text{پس ضابطہ (ج) کی رو سے فرو} = \frac{\text{لا} - \text{ما} \cos ۵۶۰ + \text{فرلا} + \text{ما} - \text{لا} \cos ۵۶۰}{ی}$$

$$\text{دی ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے فرو} = \frac{۳۶۶۲۹ + ۵۰ + ۲}{۶۲.۱} = ۵۹۰.۶ \text{ فٹ}$$

۱۰۰ فی صدی خطا = $\frac{فری}{ی}$ = ۸ و ۰ جواب

مثالیں

(۱) دو برقی مزاحمتیں زہ نہ ہوتو ازی جوڑی گئی ہیں۔ ان کی سادل مزاحمت $ز = \left(\frac{1}{ز_1} + \frac{1}{ز_2} \right)$ کی حسابی تعیین میں ممکنہ فی صدی خطا دریافت کرو جبکہ زہ نہ کی پیمائش میں ۱ فی صد کی خطا واقع ہوئی ہے۔ [جواب = ۱ فی صد
(۲) جب کوئی جسم حالت سکون سے جاذبہ زمین کے زیر اثر گرتا ہے تو اس کا و ثانیوں میں طے کیا ہوا فاصلہ $s = \frac{1}{2} g t^2$ ج و کو قیمت پیمائش سے ۱۰ ثانیہ معلوم ہوئی ہے اور اس میں ایک ثانیہ کی خطا کا امکان ہے۔ ج جاذبہ زمین کی تعیین میں ۰.۱ فی صد خطا ممکن ہے بتاؤ کہ اس کے محسوب کرنے میں ممکنہ فی صد خطا ۴۱ ہے۔

(۳) ایک سطحی $\frac{لا}{لا + ما} = \frac{لا}{لا + ما}$ دی گئی ہے۔ اگر نقطہ لا = ما = ۴ پر لا اور ما ہر ایک بقدر $\frac{1}{10}$ بڑھ جائیں تو ثابت کو کہ ی کی تقریبی تبدیلی $\frac{1}{10}$ ہے۔
(۴) ایک ٹھوس فلزی مستطیل منشور کے کنارے ۳۱۲ اور ۴ فٹ لمبے ہیں۔ پیمائش کی زیادتی سے یہ کنارے ۰.۰۰۱ فٹ فی فٹ فی وقت بڑھتے ہیں۔ بتاؤ کہ ٹھوس مجسم کے حجم میں اضافہ کی شرح ۰.۰۰۲ کعب فٹ فی وقت ہے۔
(۵) ایک جسم کی کثافت اضافی صوابہ $\frac{دیں}{دیں + دے}$ کے ذریعہ دریافت کی جاتی ہے۔ جس میں اس کا وزن خلا میں ۱ ہے اور پانی میں ۱۔ اگر $دیں = ۹$ پونڈ اور $دے = ۵$ مشخص ہوئے ہیں اور اول الذکر قیمت کی تعیین میں ۰.۱ پونڈ اعظم خطا اور ثانی الذکر کی تعیین میں ۰.۰۲ پونڈ اعظم خطا کا امکان ہے تو بتاؤ کہ کثافت اضافی محسوب کرنے میں اعظم خطا تقریباً ۰.۱۳۴ ہے۔

کے تفاعل ہلیں۔

اسی طرح اگر $\frac{ف}{لا}$ (لا، ما، ی) اور لا، ما، ی سب کے سب و کے تفاعل ہیں تو

فرء = $\frac{جفء}{جفلا} + \frac{جفء}{جفما} + \frac{جفء}{جفی}$ (ھ) ...
ایسا ہی تین سے زائد متغیروں کے لیے بھی
(د) میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ و = لا تب ما تفاعل ہے لا کا اور و ایک
ہی متغیر لا کا تفاعل ہے۔ جس سے حاصل ہوتا ہے۔

فرء = $\frac{جفء}{جفلا} + \frac{جفء}{جفما}$ (و) ...
اسی طرح (ھ) سے جبکہ ما اور ی دونوں لا کے تفاعل ہیں حاصل ہوتا ہے۔

فرء = $\frac{جفء}{جفلا} + \frac{جفء}{جفما} + \frac{جفء}{جفی}$ (نہا) ...

یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ $\frac{جفء}{جفلا}$ اور $\frac{جفء}{جفما}$ ایک دوسرے سے بالکل مختلف
مفہوم رکھتے ہیں۔ جزوی مشتق $\frac{جفء}{جفلا}$ اس مفروضہ پر بنتا ہے کہ مخصوص متغیر
لا ہی اکیلا بدلتا ہے۔ باقی دوسرے تمام متغیر بدلنے نہیں دیے جاتے لیکن

$$\frac{فرء}{جفلا} = \frac{نہا}{(جفلا)}$$

جس میں $\frac{جفء}{جفلا}$ پورا مشتق ہے و کا تمام متغیروں کی تبدیلیوں کی
وجہ سے جو متبوع متغیر میں $\frac{جفء}{جفلا}$ تبدیلی کے باعث پیدا ہوتی ہیں۔ جزوی
شتقات سے امتیاز کی خاطر $\frac{فرء}{جفلا}$ پورے مشتق کہلاتے ہیں
علی الترتیب بالفاظ و اور لا کے

یہ جاننا چاہیے کہ $\frac{جفء}{جفلا}$ کسی بھی نقطہ (لا، ما) کے لیے ایک بالکل یقین محدود

قیمت رکھتا ہے۔ لیکن $\frac{فری}{فرلا}$ نہ صرف نقطہ (لا، ما) کے تابع ہے بلکہ اس خاص سمت کے بھی جو اس نقطہ تک پہنچنے کے لیے منتخب کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال - $س = و (ما - ی) = ا = ا جب لا ی = جم لا$

دیے جاتے ہیں، $\frac{فری}{فرلا}$ دریافت کرو۔

حل - $\frac{جنت لا}{جنت لا} = ا و (ما - ی) = ا جب لا = و (لا - جنت ی) = - و (لا - جنت ی)$

$\frac{فرما}{فرلا} = ا جم لا = و (فری) = - جب لا - ان کو ضابطہ (نر) میں$

تعویض کرنے سے

$\frac{فری}{فرلا} = ا و (ما - ی) + ا و (جم لا) + و (لا - جنت لا) = و (لا - جنت لا) = جلا$

۱۔- تضمینی تفاعلوں کا تفرق -

مساوات ف (لا، ما) = (۱) لا کی بحیثیت تفاعل
ما یا لا کی بحیثیت تفاعل لا تعریف کرتی ہے۔ لا اور ما کی اس مساوات
میں تمام رتیں ایک ہی جانب منتقل کر دی گئی ہوتی ہیں۔
فرض کرو

(۲) $س = ف (لا، ما)$

تب ضابطہ (و) سے $\frac{فری}{فرلا} = \frac{جنت ف}{جنت لا} + \frac{جنت ف}{جنت ما} \frac{فرما}{فرلا}$

اور ما، لا کا ایک اختیاری تفاعل ہے۔ اب فرض کرو ما، لا کا وہ تفاعل ہے

جو (۱) کی شرط کو پوری کرتا ہے

تب $r = 0$ اور $r = 0$ اور اس لیے

$$(۳) \dots\dots\dots = \frac{\text{جف ن فرما}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ن فرما}}{\text{جف لا}}$$

$$(ح) \dots\dots\dots = \frac{\text{فرما}}{\text{فر لا}} - \frac{\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}} \dots\dots\dots \left[\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} \right] \dots\dots\dots$$

اس ضابطہ کے ذریعہ تفسینی تفاعلوں کا سہولت کے ساتھ تفرق عمل میں آ سکتا ہے۔
توضیحی مثال - ضابطہ (ح) کے ذریعہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فر لا}}$ معلوم کرو جبکہ
 $\text{لا} - \text{لا} + \text{لا} + \text{لا} = \text{لا}$

$$\text{حل} - \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ + \text{لا} + \text{لا} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ + \text{لا} + \text{لا}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ + \text{لا} + \text{لا}}{\text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ - \text{لا}}$$

فا (لا، ما، ی) = (۴) ایک سطح ہے

فرض کرو لا = فہ (و) ما = کہ (و) ی = سہ (و) (۵)
ایسے تفاعل ہیں جن سے (۴) کی متماثل تصدیق ہوتی ہے۔ تب مساواتیں (۵)
سطح (۴) پر کے معنی کی تفسینی مساواتیں ہیں۔

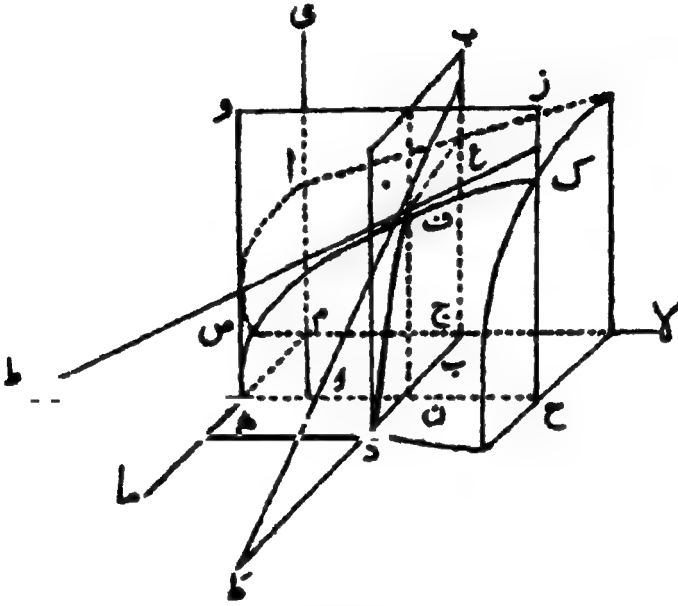
اگر $r = 0$ فا (لا، ما، ی) (۶)

تب (۵) کو استعمال کرنے سے $r = 0$ اور $r = 0$ پس ضابطہ (نہا) ہو جاتا ہے۔

$$= \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ما}}$$

$$(۶) \dots\dots\dots + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر ی}}$$

سطح (۴) پر کے معنی کے لیے جس کی تعریف (۵) سے ہوتی ہے۔ یہاں ہم دو خاص مثالوں پر غور کریں گے۔ شکل ۹۷ میں معنی ص ف ک سطح کی مستوی تشریح



شکل ۹۷

جو مستوی ۱ = مستقل سے بنتی ہے۔ پس (۷) میں

$$\text{فرما} = . \text{ اور } \frac{\text{جنت ا}}{\text{جنت لا}} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} + \frac{\text{جنت ا}}{\text{جنت ی}} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر و}} = .$$

$$(۸) \text{ سے حاصل ہوتا ہے } \frac{\text{فر ی}}{\text{فر و}} = \frac{\frac{\text{جنت فا}}{\text{جنت لا}}}{\frac{\text{جنت فا}}{\text{جنت ی}}} \quad (۹)$$

لیکن اس مساوات میں میدے جانب کا رکن معنی ص ف ک کی ڈھلان ہے۔ پس

$$(۱۰) \quad \frac{\text{جنت ی}}{\text{جنت لا}} = \frac{\frac{\text{جنت فا}}{\text{جنت لا}}}{\frac{\text{جنت فا}}{\text{جنت ی}}}$$

اسی طریقہ پر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \dots\dots\dots (۱)$$

ضابطوں (ط) اور (ی) کی یوں ترجمانی کی جاتی ہے: مساواتوں کے سیدھے جانب کے ارکان میں ی وہ تفاعل ہے لا اور ما کا جو (۲) کی شرط کو پوری کرتا ہے۔ بائیں جانب سے ارکان میں فا تین متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے جو (۲) کے سیدھے جانب کے رکن میں موجود ہے۔

توضیحی مثال۔ مساوات $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} + \frac{ی}{۳} - ۱ = ۰$ سے
ی کی بطور لا اور ما کے ایک تفسینی تفاعل کے تعریف کی جاتی ہے۔ اس تفاعل کے جزوی مشتقات معلوم کرو۔

$$\text{حل۔ فا} = \frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} + \frac{ی}{۳} - ۱ = ۰$$

$$\text{پس جف فا} = \frac{لا}{۱} \text{ جف فا} = \frac{ما}{۲} \text{ جف فا} = \frac{ی}{۳} \text{ جف فا} = \frac{ی}{۳}$$

ضابطوں (ط) اور (ی) میں تعویض کرنے سے

$$\text{جف ی} = \frac{ج لا}{۳} \text{ اور جف ی} = \frac{ج ما}{۲} \text{ جواب} =$$

(نوٹ ۲۔ کی توضیحی مثال سے اس کا مقابلہ کیا جائے)

مثالیں

$$(۱) \frac{لا + ۲ما + ۳ی}{۱ - لا - ۲ما - ۳ی} = ۱ \text{ ثابت کر دو} \text{ فرء} = \frac{۱ - ۲ - ۳}{۱ - ۲ - ۳}$$

$$(۲) لا - لا + لا + لا + لا = ۰ \text{ ضابطہ (ح) استعمال کر کے بتاؤ کہ}$$

$$\frac{۳لا + ۲ما + ۱ی}{۳لا - ۲ما - ۱ی} = \frac{۳لا + ۲ما + ۱ی}{۳لا - ۲ما - ۱ی}$$

(۳) مساوات $لا^۲ + ما^۲ - ۶ لا لا - ۱۹ = ۰$ صحیح ہے جبکہ $لا = ۲$ ، $ما = ۱$ ۔
بتاؤ کہ $۲ = \frac{ما}{لا}$

(۴) $لا^۲ + ما^۲ - ۳ لا لا ما = ۰$ بتاؤ کہ جفت $ی = \frac{ی+۱}{لا+ما}$

اور جفت $ما = \frac{جفت ی}{لا+ما}$

(۵) ایک نقطہ سطح $لا + لا ما + ما^۲ - ی = ۰$ اور مستوی $لا - ما + ۲ = ۰$ کے تقاطع کے معنی پر حرکت کرتا ہے۔ $لا$ کی قیمت جب ۳ ہے اور وہ ۲ اکائیاں فی ثانیہ بڑھتا ہے تو ثابت کرو کہ (۱) $ما$ کی تبدیلی کی شرح ۲ اکائیاں فی ثانیہ ہے (ب) کی تبدیلی کی شرح $\frac{۳}{۲}$ اکائیاں فی ثانیہ ہے (ج) نقطہ کی رفتار حرکت ۴ و ۴ اکائیاں فی ثانیہ ہے۔

(۶) کال گیس کی اختتامی مساوات $دح = مرت$ ہے جس میں $د$ ح اور $ت$ علی الترتیب گیس کے دباؤ حجم اور تمپریچر ہیں اور $م$ گیس مستقل ہے۔ ایک خاص آن میں گیس کی ایک معینہ کلیت کا حجم ۲۰ کعب فٹ ہے اور اس کا دباؤ ۳۰ پونڈ فی مربع انچ۔ اگر کو ۹۶ مان کر دریافت کرو کہ گیس کی پیمائش کی شرح سے بدلتی ہے جبکہ اس کا حجم بشرح $\frac{۱}{۲}$ کعب فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے اور دباؤ بشرح $\frac{۱}{۲}$ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ گھٹتا ہے۔ (جواب = بشرح $\frac{۱}{۲}$ درجہ فی ثانیہ)

۷۔ متغیروں کی تبدیلی۔ اگر $ر = ف(لا، ما)$ ۔ (۱)

میں متغیر بدل دیے جاتے ہیں بذریعہ استحالہ (Transformation)

لا = فہ (ر' س')، ما = سہ (ر' س') (۲)

تو ر کے جزوی مشتقات بلحاظ نئے متغیروں $ر'$ اور $س'$ کے ضابطہ (د) سے دریافت کر لیے جاسکتے ہیں کیونکہ اگر ہم $س$ کو بدلنے نہ دیں تو

لا اور ا (۲) میں صرف ر ہی کے تفاعل ہوتے ہیں۔ پس

$$(3) \quad \frac{\text{جف د}}{\text{جف ر}} = \frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}}$$

یہ خود بھی لا اور ما کے تفاعل میں اور اس لیے تفریق کیے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ اس میں کے پہلے تفاعل کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{جف}^2 \text{لا}} \dots (۳)$$

اسی طرح (۲) میں کے دوسرے تفاعل کو تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{\text{جف}^2 \text{لا}}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{جف}^2 \text{ما}} = \frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{جف}^2 \text{ما}} \dots (۴)$$

(۳) اور (۴) میں دوسرے رتبہ کے بظاہر چار مشتقات ہیں۔ لیکن یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^2 \text{و}}{\text{جف}^2 \text{لا}} \dots (ک)$$

صرف شرط یہ ہے کہ متعلقہ مشتقات مسلسل ہوں۔ بالفاظ دیگر لا اور ما کے لحاظ سے متواتر جزوی تفریق جب عمل میں آتا ہے تو عمل تفریق کی ترتیب کا نتیجہ ما پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ چنانچہ ف (لا^۲ما) کے دوسرے رتبہ کے صرف تین جزوی تفریق ہوتے ہیں۔ یعنی

$$\frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})} = \frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})} = \frac{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})}{\text{ف}^2 (\text{لا}^2 \text{ما})} \dots (۵)$$

اس سے اعلیٰ درجہ کے مشتقات کے متعلق بھی اس قاعدہ کو توسیع دی جاسکتی ہے۔ مثلاً چونکہ ضابطہ ک کی صحت مان لی گئی ہے

$$\frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} \dots$$

$$\frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} = \frac{\text{جف}^3 \text{و}}{\text{جف}^3 \text{لا}} \dots$$

تین یا اس سے زائد متغیروں کے تفاعلوں کے بھی ان کے مائل نتائج صادق آتے ہیں۔ طالب علم چند مثالیں لے کر آزما سکتا ہے۔

مشائیں

(۱) $y = \frac{b+u}{b-u}$ کے دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بتاؤ۔

$$\left[\frac{u}{(1-u)} = -\frac{\text{جفتی}}{\text{جفتی}} \cdot \frac{(1+u)^2}{(1-u)} = \frac{\text{جفتی}}{\text{جفتی}} \cdot \frac{u}{(1-u)} = \frac{\text{جواب جفتی}}{\text{جفتی}} \right]$$

[illegible]

(۳) اگر $s = (1 + a + a^2 + a^3 + \dots)$ تو بتاؤ کہ

$$\frac{\text{جف}^2}{\text{جف} \times \text{جف}} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف} \times \text{جف}} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف} \times \text{جف}}$$

(۴) اگر $\sqrt{a^2 + b^2}$ کو ثابت کرو کہ $\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1$

(5) اگر $s = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ تو بتاؤ کہ $\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} = s$

(۶) اگر $y = \frac{1}{x}$ تو بتاؤ کہ $\frac{Jf^2}{Jf} + \frac{Jf^2}{Jf^2} + \frac{Jf^2}{Jf^2} = 0$

(۷) اگر $f = f(x, y, z)$ اور $u = u(x, y, z) = 0$ ص جمطہ، $a = a(x, y, z) = 0$ ص جب طہ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جم طه}}{\text{جف ص}} - \frac{\text{جب طه}}{\text{جف ص}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{جف د}}{\text{جف ا}} = \text{جب ط} \frac{\text{جف د}}{\text{جف ص}} + \frac{\text{جف ط}}{\text{جف ص}}$$



اکیسواں باب

ضعفی تکملے

۱۔ جزوی اور متواتر تکملے۔ تفرقی احصا میں

جس طرح جزوی تفرقی عمل میں آتا ہے اسی طرح تکمیلی احصا میں اس کا معکوس عمل جزوی تکمل ہے۔ جزوی تکمل سے مراد یہ ہے کہ دو یا اس سے زائد متبوع متغیروں والے تفرقی جملہ کا تکملہ دریافت کیا جائے۔ اس طریقہ پر کہ پہلے ان متغیروں میں سے صرف ایک کو متغیر اور باقی سبھوں کو مستقل مان کر جملہ تکمل کیا جائے اور پھر باقی ماندہ متغیروں میں سے دوسرے ایک کو متغیر اور بقیہ کو مستقل مان کر حاصل شدہ جملہ تکمل کیا جائے یہاں تک کہ ہر باری باری سے سب متغیر ختم ہو جائیں۔ ایسے تکملے ضعیفی متغیروں کی تعداد کے لحاظ سے دہرے دہرے یا ضعیفی کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر $\text{جف}^2 = \text{لا} + \text{ما}$

تو $\int (\text{لا} + \text{ما})$ فرلا فرما

اور اس کے تعین کے لیے $(\text{لا} + \text{ما})$ کا پہلے $(\text{لا کو مستقل مان کر})$ لجاؤ

مکملہ معلوم کیا جاتا ہے، چنانچہ

$$\text{جفت د} = \frac{1+9}{1+1} + 1 + \frac{1+9}{1+1} + \text{فہ (لا)}$$

جس میں فہ (لا) بمحاطہ اس کے کہ لا کو مستقل مانا گیا تھا لا کا ایک اختیاری تفاعل ہے اور پھر محل شدہ جملہ کا (ما کو مستقل مان کر) بمحاطہ لا تکملہ دریافت کیا جاتا ہے۔ چنانچہ

$$د = \frac{1+9}{1+1} + 1 + \frac{1+9}{1+1} + \text{فہ (لا)} + \text{سسہ (ما)}$$

جس میں سسہ (ما)، ما کا ایک اختیاری تفاعل ہے اور فہ (لا) = فہ (لا) فرا

مطل۔ محدود و دہرا تکملہ۔ فرض کرو کہ ف (لا، ما)

لا اور ما کا ایک مسلسل اور وحید العینیت تفاعل ہے۔ ہندی سحاط سے

$$د = \text{ف (لا، ما)} \dots \dots \dots (۱)$$

ایک سطح ک ل کی مساوات ہے۔ شکل ۹۹ میں ایک سطح س جو مستوی لا مرما میں واقع ہے اور اس کو اساس مان کر اس پر ایک قائم استوانہ تیار کرو جس کی دیواریں دے کے متوازی ہیں۔ اب اگر یہ استوانہ سطح ک ل میں سے رقبہ س کو گھیر لے تو س، س اور اسطوائی سطح سے محدود حجم کی تعین کے لیے حسب ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے:

دے کے متوازی مساوی فضلوں (= صف لا) پر رقبہ س کے اندر خطوط مستقیم کی ایک قطار کھینچو۔ اسی طرح دے کے متوازی مساوی فضلوں (= صف ما) پر خطوط کی ایک دوسری قطار کھینچو۔ ان خطوط میں سے علی الترتیب ما دے اور لا دے کے متوازی مستویاں تیار کرو۔ اس طرح رقبوں س اور س کے اندر خطوط کا ایک ایک جال تیار ہوتا ہے جن میں سے س کے اندر کا جال صف لا صف ما رقبہ کے مستطیلوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ شکل کے مطالعہ سے

اسی طرح بتایا جاسکتا ہے کہ ح = م^ج فرما^ک (لا^ا ما) فلا (۶)

(۵) میں اتہا میں دو اور دو گ محذ لا کے تفاعل میں اس لیے کہ وہ

مجموعہ کے قاعدہ کے محیط کی مساوات کو ماکے لیے حل کرنے سے دریافت ہوتی ہیں۔
 اسی طرح (۶) میں انتہائیں ۵ و ۵ اور ۵ و محدود ماکے تفاعل ہیں۔
 (۴) (۵) اور (۶) کے باہدگیر مقابلہ سے نتیجہ ذیل اخذ ہوتا ہے:-

ح = نیا = ح ف (لا ا) مفا مفا لا = $\int_{r_0}^{r_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(r, \theta) r dr d\theta$ ف (لا ا) فرما فرلا (۲)

جن میں وہ اور وہ عموماً ما کے تفاعل ہیں اور ک اور ک عموماً لا کے تفاعل۔
ہر صورت میں پہلی علامت تکمیل پہلے تفرقہ سے متعلق ہوتی ہے اور دوسری

علامت تکمل دوسرے تفرقہ سے -
 مساوات (۱) دہرے مجموعوں کے لیے تیرجوں باب کے ۱ کے
 اساسی مسئلہ کی توسیع ہے -

توضیحی مثال (۱) ثابت کرو کہ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ لا فلا فرما = $\frac{\pi}{4}$

حل - $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \sin^{-1} x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{32}$ لا فلا فرما فری = $\frac{\pi}{32}$

حل - مکملہ = $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{x^3}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{15} \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{32}$ لا فلا فرما

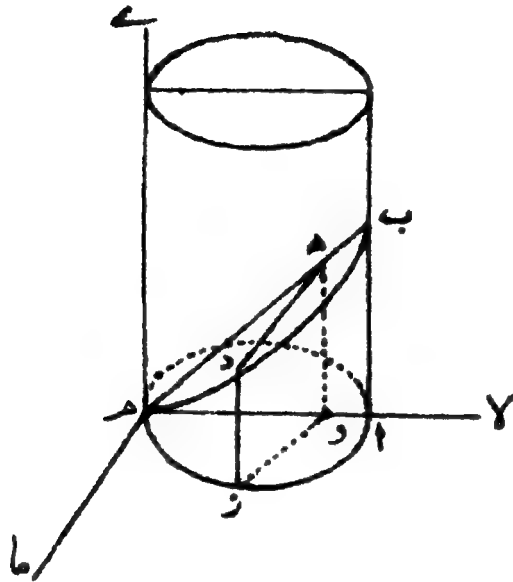
لامیہ = $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{x^3}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{15} \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{32}$ لا فلا

ریاضی = $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{x^3}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{15} \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{32}$ لا فلا

توضیحی مثال (۳) اسطوانی سطح $z = 1 + x^2 + y^2$ اور $z = 0$ اور
 ستویں $xy = 0$ سے محدود فائدہ کا حجم
 دریافت کرو -

حل - شکل منہ میں نصف فائدہ $z = 1 + x^2 + y^2$ ہے - اس

کی تراش دز و مستوی مائے کے متوازی ہے اور
 اس میں لامستقل ہے - مائے کے حدود صفر اور $z = 1 + x^2 + y^2$ ہیں -
 پس مطلوبہ حجم کا نصف ہے -



نمک مثلاً

$$\frac{C}{2} = \text{م}^2 \text{ فرلا } \sqrt{2 - \text{لا}^2} \text{ م لا فرلا}$$

$$= \text{م}^2 \text{ فرلا } \sqrt{2 - \text{لا}^2} \text{ فرلا} = \text{م}^2 \text{ فرلا } \sqrt{2 - \text{لا}^2} \text{ فرلا}$$

$$= \text{م}^2 \text{ فرلا } \sqrt{2 - \text{لا}^2} \text{ فرلا} \text{ اگر لا کو واجب طہ لکھا جائے تو}$$

$$= \text{م}^2 \text{ فرلا } \sqrt{2 - \text{لا}^2} \text{ فرلا} \text{ (ا۔ جب طہ) جم طہ فرط}$$

$$[\text{اس لیے کہ لا} = \sqrt{2 - \text{لا}^2} \text{ (ا۔ جب طہ) اور فرلا} = \text{جم طہ فرط}]$$

$$= \text{م}^2 \text{ فرلا } \frac{\pi}{2} \text{ اور ح} = \text{م}^2 \text{ فرلا} = \text{جواب}$$

مثالیں

ذیل کے تکراروں کی تصدیق کرو:۔

$$(۱) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

$$(۲) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

$$(۴) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

$$(۵) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

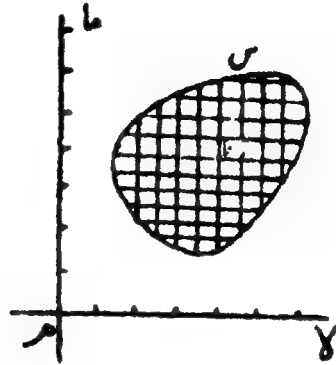
$$(۶) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

$$(۷) \quad \frac{1}{3} \text{ حجم طم سے جب طہ فرط فرس} = \frac{1}{3}$$

۳۔ محدود دہرے تکملہ کی قیمت ایک خطہ س کے

اوپر۔ یہ کوئی ضروری نہیں کہ ہر دہرہ محدود تکملہ ایک حجم ہی ہو۔ اگر لا' ما' پی
فضائیں کے کسی نقطہ کے محدود ہیں تو نتیجہ یقیناً حجم ہے۔ لیکن اگر ہم
مستوی لام' ما' میں ایک خط س سے بحث کر رہے ہیں اور اس کے
ساتھ اس کے ہر نقطہ (لا' ما) سے ایک دیا ہوا تفاعل ف (لا' ما) وابستہ
ہے (مثلاً ایک پتلی بہت کی کثافت یعنی کمیت فی اکائی رقبہ یا کوئی اور
خاصیت) تو ہم خطہ مذکور کو لام' ما کے متوازی خطوط کھینچ کر ف (لا' ما) سے
رقبہ کے مستطیل غنموں میں تقسیم کر کے مجموعہ $\sum \sum$ ف (لا' ما) سے لام' ما
حاصل کر سکتے ہیں اور

با ح ح ف (لا' ا) مع لا مع ا = کر کف (لا' ا) فلا فرما ... (۱)



شکل ۱۱

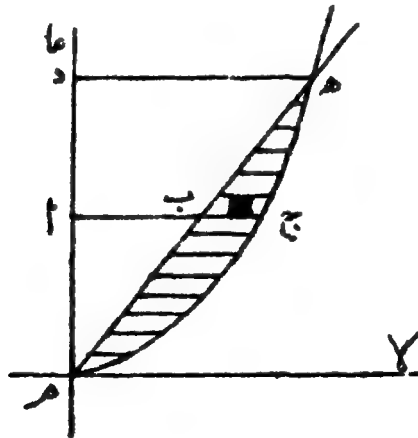
ط س کے اوپر تفاعل ف (لا' ا) کا دُہرا تکمیل نامے۔ رابطہ (۱) سے اس دُہرے تکمیل کی قیمت متواتر تکمیل یہ معلوم کی جا سکتی ہے۔ اب تکمیل کے حدود کی تیسرین باقی تی ہے۔

مستوی رقبہ بحیثیت محدود دُہرا تکمیل۔ علی القوام
و۔ بارہویں باب کی فصل (۱) میں اگھرے تکمیل کے
مستوی رقبوں کی تعین کا سوال حل کیا گیا تھا۔ دُہرے تکمیل کے
اس کا حل زیادہ تر اس لیے مفید ہے کہ اس سے عام سوال میں حدود
میں واضح ہو جاتی ہے۔
شکل ۱۲ کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جالدار خطہ س کا رقبہ

س = نہا ح ح مع لا مع ا = کر کف فلا فرما ... (ب)

پس رابطہ (۱) کے مد نظر ہم کہہ سکتے ہیں کہ
 سی خط کا رقبہ اس خط کے اوپر تغاٹ ف (لا'ما) = ا کے دُہرے
 کی قیمت ہے۔
 ۲ کے مد نظر کہا جاسکتا ہے کہ یہ رقبہ عدد آ قاعدہ مں پر اکائی بلند
 بنائے ہوئے اسطوانہ کے رقبہ کے مساوی ہے۔
 مندرجہ ذیل مثالوں سے معلوم ہو جائیگا کہ مکمل کے حدود کس طرح
 نت کیے جاتے ہیں۔

توضیحی مثال ۱۔ م ر لا کے اوپر نیم کبی مکافی ما^۲ = لا^۲
 ع^۲ مستقیم ما = لا سے جو رقبہ محدود ہے اس کو محسوب کرو۔
 حل۔ شکل ۱۲ کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ پہلے مکمل بلجاٹا لا عمل
 الایا جاتا ہے۔ یعنی عناصر فر لا فرما ایک افقی (محور م ر لا کے متوازی)



شکل ۱۲

میں جوڑے جاتے ہیں۔

پس ا^ج فر لا فرما = فرما^ج فر لا = ارتفاع فرما کی افقی پٹی کا رقبہ

اس کے بعد اس نتیجہ کو بلحاظ ما تکمل کیا جاتا ہے۔ یعنی شکل کی تمام منفی پٹیاں جوڑ لی جاتی ہیں۔ پس

$$\text{رقبہ ۱} = \text{مردم} \int \text{فرما فرلا}$$

پہلے تکمل کے حدود ۱ ب اور ۲ ج کی تعیین کے لیے رقبہ کو محدود کرنے والے منحنیوں کی مساواتیں حل کر کے لا کی قیمت معلوم کر لی جاتی ہے۔ چنانچہ خط تقسیم کی مساوات سے لا = ۱ ب ما اور نیم کعبی مساوات سے لا = ۱ ج = ما^۲ دوسرے تکمل کے حدود صفر اور مرد ہیں۔ مرد کی تعیین کے لیے دی ہوئی دونوں مساواتیں ہمزاد تصور کر کے حل کی جاتی ہیں جس سے منحنیوں کے نقطہ تقاطع ھ کے محدود (۱، ۱) معلوم ہو جاتے ہیں۔ پس مرد = ۱

اور ۱ = ۱^۲ ۱ فرما فرلا = ۱ (ما^۲ - ما) فرما = [ما^۲ - ۱/۴ ما^۲] = ۱/۱۰

اس سوال کے حل میں ہم یہ بھی کر سکتے تھے کہ عناصر فرلا فرما کو انتصابی پٹی میں جوڑ لیتے اور بعد کو یہ سب انتصابی پٹیاں جمع کر لی جاتیں۔ یعنی

$$۱ = ۱ \int \text{فرلا فرما} = ۱ (لا - لا^۲) فرلا = ۱/۱۰$$

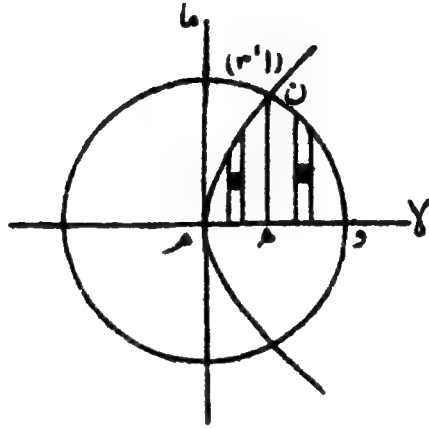
یاد رہنا چاہیے کہ یہ ایک ایسی مثال ہے جس میں تکمل کے عمل کی کوئی بھی ترتیب (یعنی پہلے کونسا مکمل عمل میں لایا جاتا ہے اور بعد کو کونسا) اختیار کر لی جاسکتی ہے۔ لیکن توضیحی مثال (۲) کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ ہر صورت میں ایسا نہیں کیا جاسکتا۔

توضیحی مثال (۲) پہلے ربع کے اندر کا رقبہ دریافت کرو جو محدود ہے محور لا

اور منحنیوں

$$لا + ما = ۱۰ \quad اور \quad ما = ۹ لا$$

حل پہلے ہم انصباہی پٹیاں استعمال کر کے بلحاظاً مانتھل کرینگے۔ شکل ۳۳ کے مطالعہ سے فوراً معلوم ہو جائیگا کہ اس طرز عمل سے ہمیں دو ٹکٹوں کی ضرورت ہوگی۔ چونکہ دائرہ اور مکافی کے نقطہ تقاطع ن کے محدد (۳، ۱) ہیں اور



شکل ۳۳

مکافی پر ماردن کے مابین $3 = 1$ پس رقبہ من $5 = \int_0^3 \sqrt{4-x^2} dx$ فرلا فرما

$$= \int_0^3 \sqrt{4-x^2} dx = 2$$

اسی طرح رقبہ ون $5 = \int_1^3 \sqrt{4-x^2} dx$ فرلا فرما $= \int_1^3 \sqrt{4-x^2} dx$

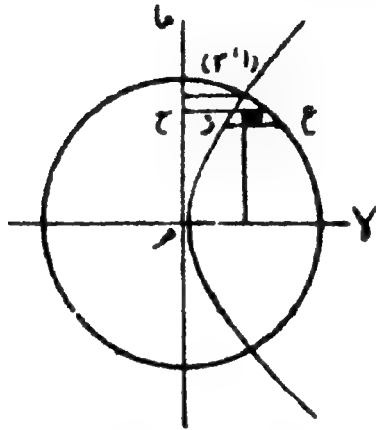
$$= \left[\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_1^3$$

$$= \left(\frac{3}{2} \sqrt{4-9} + 2 \sin^{-1} \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4-1} + 2 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right)$$

$$= -10.5 + (5.41 - 0.322) = 4.588$$

∴ پورا رقبہ من و 4.588 جواب

اس کے برعکس اگر ہم پہلے افقی پٹیاں استعمال کر کے لمبا ط لا تکمیل کریں تو شکل ۱۰۳ کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ پورے رقبہ کی قیمت $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ فرما فرلا



شکل ۱۰۳

چونکہ $dz = 1$ اور $dx = 1$ اور $dy = 1$ ہے

$$\text{رقبہ} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dz = \int_{-1}^1 \left[z \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}) \right) dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{1-1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3}$$

پس واضح ہے کہ دوسرا طریقہ آسان تر ہے اور عام طور پر ایسے سوالوں کے حل میں کوشش کی جانی چاہیے کہ تکمیل کی ترتیب ایسی ہو کہ حتی الامکان ایک ہی متغیر سے رقبہ مطلوب معلوم ہو جائے۔

مشائیں

(۱) دُہرے تکمیل کے ذریعے مکافیوں $z = 1$ اور $z = -1$ کا درمیانی رقبہ دیا فٹ کرو۔ (ا) پہلے لمبا ط لا تکمیل کر کے (ب) پہلے لمبا ط لا تکمیل کر کے

[جواب (۱) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ فرما فرلا = ۵ (ب) $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$ فرما فرلا = ۵
دوسرے تکمل کے ذریعہ ذیل کے دو مغنیوں کے امین محدود رقبہ کی تعیین کرو:

(۲) لا'۲ = لا'۱ + لا'۲ = ۱ + لا'۲ = ۵ [جواب = $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ کوک ۲ = ۱۹۵۶]

(۳) لا'۱ = لا'۲ - لا'۱ = لا'۲ - لا'۱ = ۱۶ [جواب = ۱۶]

(۴) ثابت کرو کہ لا'۲ = لا'۱ جب لا'۱ = لا'۲ = ۲ حجم $\frac{1}{2}$ مغنیوں سے محدود رقبوں میں بڑا رقبہ چوٹے کا نوگنا ہے۔

(۵) بتاؤ کہ مغنیوں لا'۱ + لا'۲ = لا'۳ اور لا'۱ = لا'۲ = لا'۳ سے محدود رقبوں میں بڑا رقبہ چھوٹے کا تقریباً پانچ گنا ہے۔

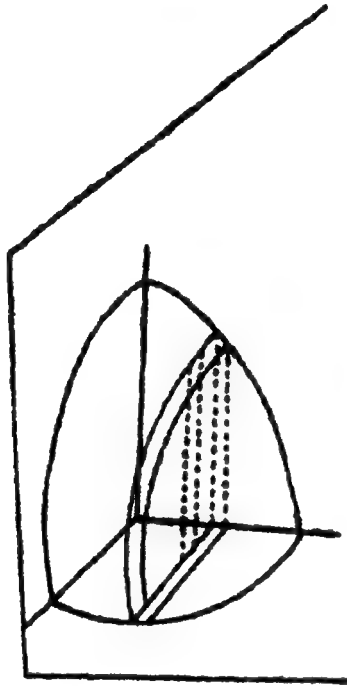
۳۔ کسی سطح کے نیچے کے حجم کی تعیین۔ م میں ایے

مجسم کے حجم سے بحث کی گئی تھی جو ی = ف (لا'۱) اور مستوی لامر ما اور ایک استوانہ سے محدود ہے۔ استوانہ کے عناصر ہر مے کے متوازی تھے اور اس کا رقبہ مستوی لامر ما کا ایک خطہ سے تھا۔ رابطہ (۱) سے اس مجسم کا حجم ہے۔

ح = $\int_0^1 y dx = \int_0^1 f(x) dx$ فرما فرلا (۱)

مجسم کی ترتیب اور اس کے حدود وہی ہیں جو رقبہ م کے لیے ہیں۔ اس نوع کے مجسم کا حجم "سطح ی = ف (لا'۱) کے نیچے کا حجم" کہلاتا ہے۔ مستوی کی صورت میں اس کی متناظر مثال "مغنی کے نیچے کا رقبہ" ہے۔ جس پر بارہویں باب میں بحث کی گئی ہے۔ کسی سطح کے نیچے کے حجم کی ایک خاص صورت ایسا حجم ہو سکتا ہے جو ی ہوئی سطح اور محدود مستوی لامر ما سے محدود ہو۔ یہ یاد رہے کہ ضابطہ (۱) میں حجم کا عنصر قاعدہ فرلا فرما پر بلند ی ی = ف (لا'۱) کا قائم مشور ہے۔

توضیحی مثال۔ ناقص مکافی نما $z = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ اور مستوی
لامرما سے محصور مجسم کا حجم دریافت کرو۔
حل۔ $z = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ اور یہ مستوی لامرما
میں مجسم کے قاعدہ کی مساوات ہے۔ $z = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ کو صفر رکھنے سے $z = 2$ ، $x = 0$ ، $x = 2$ ۔
اس لیے z کے حدود ۱ اور صفر ہیں۔ دیکھو شکل ۱۰۵۔



شکل ۱۰۵

پس مطلوبہ حجم

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2 - \sqrt{4 - x^2}) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ \frac{2}{2} (2 - \sqrt{4 - x^2}) - \frac{1}{2} (4 - x^2) \right\} dx =$$

$$= \int_0^2 \left\{ (2 - \sqrt{4 - x^2}) - \frac{1}{2} (4 - x^2) \right\} dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

$$\text{لا} = \text{جب } \pi \text{ لکھو تو } 2 - 2^2 = 2 - 2 = 0 \text{ جب } \pi = 2 \text{ حجم } \pi = 2 \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz = 2 \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

$$\text{فرلا} = \text{حجم } \pi \text{ فرط اور جبکہ لا} = \text{ا تو جب } \pi = 1 \text{ اور } \pi = \frac{\pi}{2} \text{ اور جبکہ لا} = 0 \text{ تو } \pi = 0$$

$$\text{پس ح} = \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz = \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz = \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz = \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz = \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz = \frac{\pi}{3} \int_0^1 (2 - 2^2) \sqrt{2} \, dz$$

مثالیں

(۱) ڈھیرے مکمل کے ذریعہ اسطوانی سطح ما = ۱ - لا' مستوی می = لا اور سے محدود مجسم کا حجم دریافت کرو۔

$$[\text{جواب} = 2 \int_0^1 (1 - z^2) \sqrt{2} \, dz = \frac{\pi}{3}]$$

(۲) ڈھیرے مکمل سے ایک ایسے چوسطبی مجسم (Tetrahedron) کا حجم

دیافت کرو جو محدودوں کے مستویوں اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ مستوی سے

محدود ہو۔ [جواب = $\frac{1}{6}$]

(۳) نصف قطر کے ایک کرہ میں سے ایک قائم دائری اسطوانہ (جس کے

قاعدہ کا نصف قطر ہے اور جس کا محور کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے)

ایک جسم قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا حجم $\frac{\pi}{3} [2 - (\frac{1}{2})^2]$ ہے

(۴) گردش مکانی نما $لا + ما = وی$ مستوی لامرما اور سطوا $لا + ا = اولا$ سے محدود مجسم کا حجم دریافت کرو۔

$$\left[\text{جواب} = \frac{2}{3} \int_{لا}^{لا+ما} \int_{ا}^{ا+ولا} \frac{لا+ما}{r} \cdot r \, dr \, dz = \frac{3}{2} \pi \left[\frac{2}{3} \right] \right]$$

(۵) بناؤ کہ $لا + ما = ص$ اور $لا + ی = ص$ دو اسطوانوں کا مشترک حجم $\frac{16}{3} \pi$ ہے۔

(۶) سطح $\left(\frac{لا}{3} \right) + \left(\frac{ما}{3} \right) + \left(\frac{ی}{3} \right) = ۱$ اور محدودوں کے مستویوں سے محدود حجم کی قیمت دریافت کرو۔

$$\left[\text{جواب} = \frac{16}{9} \pi \right]$$

(۷) ثابت کرو کہ سطح $لا + ما + ی = ۲$ سے محدود جسم کا مکمل حجم $\frac{32}{3} \pi$ ہے۔
[نوٹ:- کسی مطلوبہ خاص کے بموجب دہرا مکمل تیار کرنے کے لیے ذیل کی ہدایات یاد رکھی جائیں:-

(۱) متعلقہ خطہ یا رقبہ جن ضخیموں سے محدود ہے ان کو مرتسم کیا جائے۔

(۲) رقبہ کے اندر کے کسی نقطہ (= لا، ما) پر رقبہ مت لا مت لا کا مستطیلی

عنصر تیار کیا جائے۔

(۳) متفاصل ت (لا، ما) معلوم کر لیا جائے جس کو مت لا مت ما سے ضرب

دینے سے مستطیلی عنصر رقبہ کے لیے مطلوبہ خاصیت حاصل ہو جاتی ہے۔

(۴) مطلوب مکملہ اکت (لا، ما) فرلا فرما ہے جو دیے ہوئے خطہ

یا رقبہ کے اوپر محسوب کیا جاتا ہے جس طریقہ پر رقبہ دریافت کیا جاتا ہے اسی طریقہ

پر تکمیل کی ترتیب اور اس کے حدود معلوم کر لیے جاتے ہیں۔

۵۔ رقبہ کے معیار اثر اور مہندسی مرکزوں کی تعیین

سولہویں باب میں ان کے چند مسائل اکبرے مکمل کے ذریعہ حل کر کے بتائے گئے ہیں۔ یہاں ہم ان کو دہرے مکمل کی مدد سے حل کرینگے جو اکثر زیادہ بہولت کا

مثبت ہے۔

چونکہ مستطیلی عنصر رقبہ کے لیے رقبہ کا معیار اثر محور مہما کے لحاظ سے لامف لامف مہما ہے

اور محور مہما کے لحاظ سے مامف لامف مہما ہے

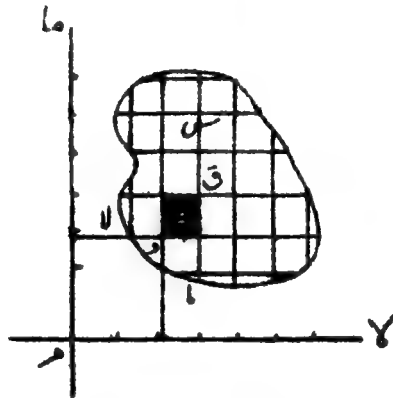
س لیے پورے رقبہ کے لیے باب محولہ کی فصل مہما کی ترقیم کے بموجب

$$\text{مہما} = \int \int \text{مافر لا فرما} \quad \text{اور} \quad \text{مہما} = \int \int \text{لا فر لا فرما} \quad \dots \dots (ج)$$

$$\text{رقبہ کا ہندسی اثر محدودوں} \quad \text{لا} = \frac{\text{مہما}}{\text{رقبہ}} \quad \text{ما} = \frac{\text{مہما}}{\text{رقبہ}} \quad \dots \dots (د)$$

سے معلوم ہو جاتا ہے۔

(ج) میں ممکنہ علی الترتیب تفاعلوں ت (لا' ما) = ما اور ت (لا' ما) = لا قیمتوں کو رقبہ کے اوپر لے کر ظاہر کرتے ہیں۔



شکل ۱۰۱

کسی معنی 'محور لا اور و و معینوں سے محدود رقبہ (بالفاظ دیگر معنی کے نیچے کے رقبہ) کے لیے رابطہ (ج) سے حسب ذیل نتائج اخذ کیے جاتے ہیں:-

$$(۱) \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{مہما} = \int \int \text{مافر لا فرما} = \frac{1}{4} \int \int \text{ما' فر لا} \\ \text{مہما} = \int \int \text{لا فر لا فرما} = \int \int \text{لا' فر لا} \end{array} \right.$$

یہ مضابطے محولہ بالا فصل کے مضابطوں (۲) سے مطابقت ہے۔ یاد رہے کہ (۱) میں
ما منہی پر کے نقطہ کا معین ہے اور اس کی قیمت لاکر رقموں میں منہی کی
مساوات سے معلوم کر لی جانی چاہئے اور تکمیل سے پہلے تکمیل (integrand)
میں تعویض کی جانی چاہئے۔

توضیحی مثال - باب ہذا کی مسئلہ کی توضیحی مثال مسئلہ میں جو
رقبہ دریافت کیا گیا ہے (یعنی پہلے ربع میں نصف کعبی مکافہ $MA^2 = LA$ اور
خط مستقیم $MA =$ لاسے محدود رقبہ) اس کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔
حل - تکمیل کی ترتیب اور اس کے حدود مثال محولہ میں دریافت ہو چکے
ہیں۔ پس بذریعہ (ج)

$$MA^2 = LA \Rightarrow \int_0^1 MA^2 \cdot dL = \int_0^1 LA \cdot dL = \frac{1}{2} \int_0^1 L^2 \cdot dL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} L^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$MA^2 = LA \Rightarrow \int_0^1 MA^2 \cdot dL = \int_0^1 LA \cdot dL = \frac{1}{2} \int_0^1 L^2 \cdot dL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} L^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

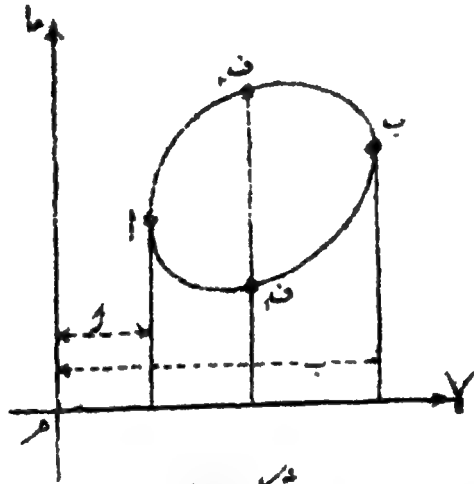
چونکہ رقبہ $MA^2 = LA$ اس لیے از روئے (د) $MA^2 = LA$ اور $MA^2 = \frac{1}{2} LA$ جواب

۶۔ پاپس یا گولڈن کے مسئلے (Pappus or Guldin)

اس نام سے دو مفید مضابطے مشہور ہیں جو گردشیں مجسموں کے حجموں اور منہی سطحوں کا
ان کی تراشوں کے ہندسی مرکوزوں کے ساتھ رابطہ ظاہر کرتے ہیں۔
مسئلہ (۱) اگر ایک مستوی رقبہ کسی ایسے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے
جو رقبہ کے مستوی کے اندر واقع ہے۔ لیکن رقبہ کو قطع نہیں کرتا ہے، تو اس
طرح پیدا ہونے والے گردشیں مجسم کا حجم، مستوی رقبہ اور اس کے ہندسی
مرکز کے طے کردہ طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔
ثبوت - مسئلہ کے رابطہ (ج) سے شکل ۱ کے رقبہ $MA^2 = LA$
کے لیے

$$MA^2 = LA \Rightarrow \int_0^1 MA^2 \cdot dL = \int_0^1 LA \cdot dL = \frac{1}{2} \int_0^1 L^2 \cdot dL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} L^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

اے ع ف = م اور ع ف = م۔ اب م کے لیے اس کی قیمت مندرجہ
ابط (د) فضل مذکور تعویض کرنے اور علامت مساوات کے دونوں جانب
لے ارکان کو ۳۲ سے ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے
۳۲ آس = ۳۲ م فرلا - ۳۲ م فرلا جس میں م = رقبہ



شکل ۱۰

اٹس جانب کے رکن کی پہلی رقم گردشی جسم کا حجم ہے جو رقبہ تحت منحنی اف ب
کے گھومنے سے پیدا ہوتا ہے اور دوسری رقم گردشی جسم کا حجم ہے جو رقبہ
تحت منحنی اب کے گھومنے سے پیدا ہوتا ہے۔ سیدھے جانب کا رکن
رقبہ اور ہندسی مرکز کے طے کردہ طول کا حاصل ضرب ہے۔ پس مسئلہ (۱)
ثابت ہو جاتا ہے۔ اور لکھا جاتا ہے

$$(۱) \quad \dots \dots \dots ۳۲ = ۳۲ آس$$

مسئلہ (۲) جب کوئی بند منحنی ایک ایسے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے
جو منحنی (۱) کے استوی کے اندر واقع ہے لیکن منحنی کو قطع نہیں کرتا ہے
تو اس طرح پیدا ہونے والے حلقہ کی منحنی سطح ایک ایسے اسطوانہ کی

سطح کے مساوی ہے جس کا قاعدہ گھومنے والا منحنی ہے اور ارتفاع منحنی کے محیط کا طے کردہ طول ہے۔

ثبوت۔ یہ ثبوت اکہرتے مکملہ کے ذریعہ باسانی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ شکل ۱۱۱ میں ف پ کے بالکل قریب منحنی کے محیط پر نقطہ ف تصور کیا جائے تو منحنی کے طول کا عنصر ف پ = م ف س۔ منحنی جب محور مرکب کے گرد زاویہ م ف ط میں گھومتا ہے تو م ف س سے پیدا ہونے والا جزو رقبہ = م م ف ط م ف س جس میں م ا = ف پ ع جب منحنی پوری گردش کر چکا ہے تو م ف س سے گردشیں سطح ۳۲ م م ف س تیار ہوتی ہے اور پورے منحنی کی گردشیں سطح = ۳۲ ک م م ف س۔ منحنی کے محیط کے ہندسی مرکز کا فاصلہ محور مرکب سے اگر لہ قرار دیا جائے تو

$$لہ = \frac{ک م م ف س}{س} = \text{منحنی کا محیط}$$

اور ۳۲ لہ س = ۳۲ ک م م ف س واضح ہے کہ ۳۲ لہ = منحنی کے ہندسی مرکز کا طے کردہ طول ہے۔
مثال۔ ایک لنگر چملا نصف قطر والے دائرہ کے ایک ایسے خط کے گرد گھومنے سے بنتا ہے جو دائرہ کے مستوی میں اس کے مرکز سے فاصلہ ط پر واقع ہے تو پائیس کے مسئلوں سے

$$\text{حلقہ کا حجم} = \pi (b^2 - a^2) = \pi^2 (b^2 - a^2)$$

$$\text{منحنی سطح} = \pi^2 (b^2 - a^2) = \pi^2 (b^2 - a^2)$$

مشائیں

مندرجہ ذیل منحنیوں سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو:-

$$(1) \text{ } a = ۱, b = ۲, c = ۳ \text{ } [\text{جواب} = ۲ - \frac{۳}{۵}]$$

(جواب = $5\frac{1}{2}$) $y = 6 + 0 \cdot x - 0y = 6$ (۳)

(۳) ثابت کرو کہ خط تدویر $l = l_0$ (ظہ - جب طہ) \Rightarrow (ا - جم طہ) کی ایک کمان کے نیچے کے رقبہ کا ہندسی مرکز $(\frac{1}{2}l_0, \frac{1}{2}l_0)$ ہے۔

(۴) پائیس کا مسد استعمال کر کے بتاؤ کہ نصف دائرہ کا ہندسی مرکز قطر کے فاصلہ $\frac{r}{2}$ ہے جس میں r دائرہ کا نصف قطر ہے

(۵) پائیس کے مسئلہ کے ذریعہ بتاؤ کہ ناقص $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ کے

پہلے ربع میں واقع رقبہ کا بند ہی مرکز $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ہے۔

(۶) ایک ناقص اپنے محورِ اعظم کے ایک سرے پر کے خطِ مماس کے گرد گھومتا ہے۔ اس طرح جو جسم بنتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

[جواب = اسباب و ارب]

(۶) ایک مربع اپنے ایک وتر کے متوازی خط کے زردھوتا ہے جو اس کے دوسرے وتر کے ایک سرے میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو حجم بنتا ہے اس کا حجم $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ اور اس کی سطح کا رقبہ $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ ہے۔

(۸) ایک مثلث کے اضلاع 'ا'، 'ب'، 'ج' ہیں اور وہ اپنے مستوی میں کے ایک خط کے گرد گھومتا ہے جس کے فاصلے اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے 'م'، 'م'، 'م' ہیں۔ بتاؤ کہ اس گردش سے جو مجسم بنتا ہے اس کی سطح = $\pi^2 (ا^2 + ب^2 + ج^2)$ ہے۔

اور اس کا حجم = $\frac{\pi r^2}{3} (h_1 + h_2 + h_3) \times \frac{1}{3} \times (s-s)(s-b)(s-c)$

جس میں سے مثلث کا نصف محیط ہے۔

(۹) مکمل کے ذریعہ ایک قائم دائری مخروط کا حجم اور اس کی سطح کا رقبہ دریافت کرو جو ایک قائم الزاویہ مثلث کے اس کے زاویہ قائمہ بنانے والے ایک ضلع کے گرد گھومنے سے تیار ہوتا ہے۔

[جواب۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر = ص، ارتفاع = ح اور تیز چابند = ل تو

سطح کا رقبہ = π مل اور حجم = $\frac{1}{6} \pi$ ص م ع [(۱۰) ثابت کرو کہ خط صنوبری (Cardioid) $s = \frac{1}{4}$ (۱-۱) جہڑ کا بند سی مرکز اس کے ابتدائی خط پر مبداء سے $\frac{1}{4}$ فاصلہ دور واقع ہے۔

۷۔ سیالی دباؤ کا مرکز۔ سولہویں باب کی فصل

۳ میں انتصابی دیوار پر سیالی دباؤ کے تعین سے بحث کی گئی تھی اور حاصل مجموعی دباؤ d کے لیے ضابطہ

$$d = \omega \cdot l \cdot a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot \text{ اخذ کیا گیا تھا۔}$$

جس میں l فرما انٹیٹیٹی کا رقبہ ہے جو سطح مایع سے عمق l پر واقع ہے۔ یہاں ہم اس حاصل مجموعی دباؤ کا نقطہ عمل (جو دباؤ کا مرکز کہلاتا ہے) دریافت کرنے کا طریقہ بیان کریں گے۔ چونکہ کسی محور کے گرد متوازی قوتوں کے معیار اثر کا حاصل جمع ان قوتوں کے حاصل مجموعہ کے معیار اثر کے مساوی ہے۔ اس لیے

ک م فرد = $\omega \cdot l \cdot a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot$ ماد جس میں l سطح مایع سے دباؤ کے مرکز کا عمق ہے۔

$$\text{پس } l \cdot a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot = \frac{\omega \cdot l \cdot a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot}{\omega \cdot l \cdot a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot} \quad (۱)$$

[واضح ہو کہ فرس = عنصر رقبہ لا فرما ہے]

اس ضابطہ میں نسب l رقبہ متعلقہ کا بلحاظ محور l معیار اثر ہے اور شمار کنندہ رقبہ مذکور کا محور مذکور کے گرد جمود کا معیار اثر ہے جو عموماً g سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اور چونکہ

$$l \cdot a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot = a \cdot r \cdot m \cdot a \cdot f \cdot r \cdot m \cdot a \cdot \text{ اس لیے}$$

$$\bar{M} = \frac{M}{L} \dots \dots \dots (2)$$

جس میں \bar{M} سے مراد محور لا کے گرد جمود کا معیار اثر ہے۔

۸۔ کسی چھوٹے گہرے ایک رقبہ کے جمود

کا معیار اثر میکانیات میں بڑی اہمیت رکھتا ہے۔
شکل ۱۱۱ کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ

$$\bar{M} = I_A \text{ مافرا فرما اور } M = I_A \text{ لافرا فرما} \dots \dots \dots (5)$$

اور گردشی نصف قطر ص^۱ ص^۲ کی تعریف (جو علی الترتیب \bar{M} ، \bar{M} سے متعلق ہیں) ذیل کے منابطوں میں مضمر ہے :-

$$V_A^2 = \frac{M}{R_A} \text{ اور } V_A^2 = \frac{M}{R_A} \dots \dots \dots (9)$$

(۵) میں جن تفاعلوں کے تکرار دیے ہوئے رقبہ کے اوپر محسوب کیے جاتے ہیں علی الترتیب ف (لا، م) = ماف (لا، م) = لا^۲ ہیں۔

جب رقبہ کسی "منحنی کے تحت" ہوتا ہے یعنی منحنی محور لا اور دو معینوں سے محدود ہوتا ہے تو

$$\bar{M} = I_A \text{ مافرا فرما} = \frac{1}{12} I_A \text{ مافرا فرما} \dots \dots \dots (1)$$

اور $\bar{M} = I_A \text{ لافرا فرما} = \frac{1}{12} I_A \text{ لافرا فرما}$
ان مساواتوں میں مافرا فرما پر کے کسی نقطہ کا معین ہے اور اس کی قیمت اس منحنی کی مساوات سے دریافت کر کے شکل میں تعویض کی جاتی ہے۔
توضیحی مثال۔ مکافی مافرا فرما کے قطعہ ب م ج

(دیکھو شکل ۱۵۸) سے متعلق معجزہ اور معجزہ دریافت کرو۔

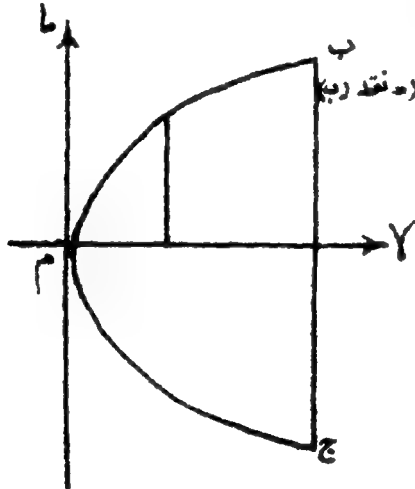
[مکافی کے نقطہ ب کے محدد م = ۱ و اور ا ب = ب]

حل - نقطہ ب کے محددوں کو مکافی کی مساوات میں تو بیض کرنے

سے ب^۲ = ۲ ف و حاصل ہوتا ہے جس سے ۲ ف = $\frac{۲}{۱}$

$$\text{پس } \frac{ب^۲}{۱} = ۲ \quad \therefore \quad \frac{ب^۲}{۱} = ۲$$

پہلے ربع میں واقع رقبہ تحت مکافی (م ن ب) کے جمود کے معیار اثر



شکل ۱۵۸

مطلوبہ جمود کے معیار اثروں کے نصف ہیں۔ پس فصل ہذا کے ضابطے (۱) استعمال کرنے سے

$$\frac{۱}{۲} \text{ مع } = \frac{۱}{۲} \int_0^1 \frac{ب^۲}{۱} \text{ فرلا } = \frac{۲}{۱۵} \text{ و } \frac{۲}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵} \text{ مع } = \frac{۲}{۱۵} \text{ و } \frac{۲}{۱۵}$$

$$\frac{۱}{۲} \text{ مع } = \frac{۱}{۲} \int_0^1 \frac{ب^۲}{۱} \text{ فرلا } = \frac{۲}{۱۵} \text{ و } \frac{۲}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵} \text{ مع } = \frac{۲}{۱۵} \text{ و } \frac{۲}{۱۵}$$

قطعہ کے رقبہ س کے لیے

$$\frac{۱}{۲} \text{ س } = \frac{۱}{۲} \text{ م فرلا } = \frac{۲}{۱۵} \text{ و } \frac{۲}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵} \text{ و } \frac{۲}{۱۵}$$

$$\therefore S = \frac{P}{p} \text{ لب}$$

اس لیے ضابطہ (و) سے $V^2 = \frac{W}{S} = \frac{1}{3} B^2$ اور $\frac{1}{3} S B^2$

$$\text{اور } V^2 = \frac{W}{S} = \frac{3}{4} L^2 \text{ اور } \frac{3}{4} S L^2$$

ستیاں دباؤ کے مرکز سے متعلق جو ضابطہ (۲) اندک کیا گیا ہے (یعنی $A = \frac{W}{S}$) اس میں محور ہلا مانع کی سطح میں واقع ہے۔ اگر تقسیم کی خاطر اس محور کو ح سے تعبیر کیا جائے تو

$$A = \frac{W}{S} = \frac{\text{رقبہ (ص) ح}}{\text{من (نقہ) ح}} = \frac{\text{ص ح}}{\text{ع ح}} \dots\dots\dots (ز)$$

جس میں ص ح = رقبہ کا گردشی نصف قطر محور ح کے گرد اور ع ح = رقبہ کے ہندسی مرکز کا محقق محور ح کے نیچے۔

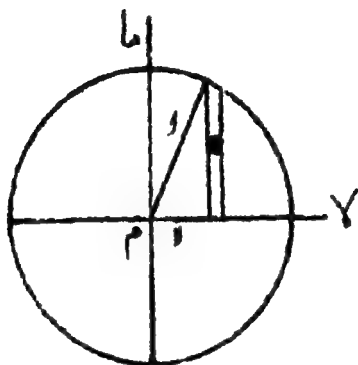
توضیحی مثال۔ پہلے ایک دائرہ کا گردشی معیار اثر اس کے ایک

قطر کے گرد دریافت کرو اور پھر ضابطہ (ز) کے ذریعہ اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جبکہ دائرہ کسی مانع میں انتصافاً واقع ہے اور اس کا مرکز سطح مانع سے عمق ع پر ہے۔

حل۔ فرض کرو دائرہ کا نصف قطر L ہے، M کا M اس کے دو قطبی القوائے محوریں اور جمود کا معیار اثر محور M کے گرد مطلوب ہے۔ دیکھو شکل منسلک۔

دائرہ کا جمود کا معیار اثر M کے گرد L لا فرلا فرما ہے جو پورے دائرہ کے اوپر محسوب کیا جاتا ہے۔ ہم اس کے ایک ربع کے لیے اس جمود کے معیار اثر کی قیمت دریافت کریں گے اور چونکہ ہر ربع کے لیے مساوی ہے اس کو M سے ضرب دینے سے پورے دائرہ کے لیے قیمت نکل آئے گی۔

دائرہ کی مسادات لا^۱ + ما^۲ = کو ہے پس پہلے مکمل میں ما کے لیے



شکل ۱۰۹

حدود تکمل ہیں صفر اور لا^۱ - لا^۲ اور پھر دوسرے تکمل میں لا کے لیے حدود صفر اور لا^۱ ہیں

$$\text{لہذا } \frac{\text{مجملا}}{\pi} = \int_0^{\text{لا}^1 - \text{لا}^2} \text{لا}^1 \text{ فرما} = \int_0^{\text{لا}^1} \text{لا}^1 \text{ فرما}$$

لا = واجب طہ لکھنے سے فرما = وجہ طہ فرطہ اور حدود ہو جاتے ہیں صفر اور $\frac{\pi}{2}$

$$\text{پس } \frac{\text{مجملا}}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{واجب طہ وجہ طہ فرطہ} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب طہ وجہ طہ فرطہ} = \frac{\pi}{14}$$

$$\therefore \frac{\text{مجملا}}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{\pi} (\pi) = \frac{1}{\pi}$$

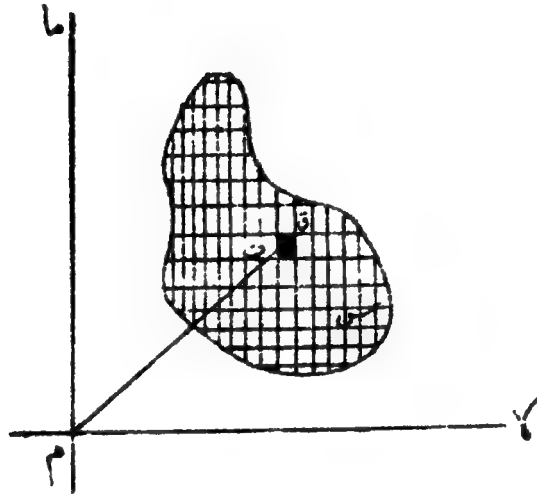
لہذا ضابطہ (ز) سے دائرہ کے دباؤ کا مرکز سطح مائع سے عمق ما

$$= \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi} \text{ پر واقع ہے۔}$$

۹۔ قطبی جمود کا معیار اثر — رقبہ س مستوی کام

کے اندر واقع ہے۔ (دیکھو شکل ۱۱۱)۔ اس کے عنصری مستطیل فاق

کے جمود کا معیار اثر مبداء م کے گرد رقبہ فوق مضروب فاصلہ
م ف کا مربع ہے۔ یعنی $(لا^۲ + ما^۲)$ مع لا مع ما ہے۔



شکل ۱۱۱

پس پورے رقبہ کے لیے حجم = $کر (لا^۲ + ما^۲)$ فرلا فرما ہے
لیکن علامت مساوات کے بائیں جانب کا جملہ

$= کر لا فرلا فرما + کر ما فرلا فرما = مج + مج$
پس کسی رقبہ کے جمود کا معیار اثر مبداء کے گرد مساوی ہے حامل جمع
اس رقبہ کے جمود کے معیار ہائے اثر کے جو محور لا اور محور ما کے گرد
لیے جائیں

مثالیں

ثابت کرو کہ

$$(۱) ناقص \frac{لا^۲}{۱۲} + \frac{ما^۲}{۱۲} = ۱ \text{ کے لیے } مج = \frac{س}{۳}$$

اور $\frac{س}{م} = ۱$ جس میں $س =$ رقبہ

(۲) مثلث مساوی الاضلاع کے رقبہ کے جمود کا معیار اثر اس کے ہندسی مرکز میں سے گزرنے والے اور ایک ضلع کے متوازی محور کے گرد $= \frac{۳۶}{۹۹} ۱$ جس میں ۱ مثلث کے ضلع کی قیمت ہے۔

(۳) کنارہ ۱ کے کعب کے جمود کا معیار اثر اس کے کسی ایک پہلو کے مستوی کے گرد $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

(۴) ایک قائم دائری مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر = $ص$ اور ارتفاع = $ع$ تو اس کے جمود کا معیار اثر اس کے قاعدہ کے مستوی کے لحاظ سے $\frac{۳}{۴} ۱$ ہے

(۵) ایک مثلث شکل کا پانی بونے کا دروازہ ہے جس کا قاعدہ پانی کی سطح کو مس کرتا ہے اور اس پانی کے اندر قاعدہ کے انتصا با نیچے واقع ہے۔ دروازہ پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

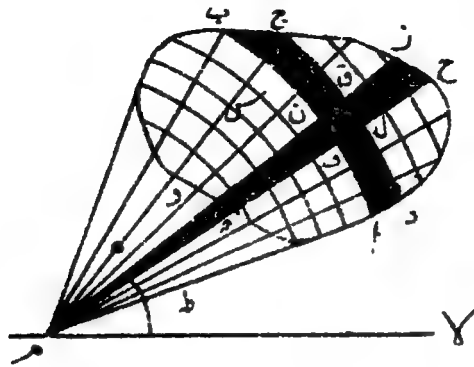
۱۔ قطبی محدود۔ مستوی رقبہ۔ جب کسی رقبہ کو

محدود کرنے والے منحنیوں کی مساواتیں قطبی محدودوں میں دی جاتی ہیں تو **فصل سلا** کی طرح اس کو $مف ط$ مساوی زاویہ میل والے سمستی نیمقطروں سے تقسیم کیا جاتا ہے اور پھر مرکز مساویان کر باہر مرکز مساوی نیمقطری فصل والے دائروں سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح رقبہ $س$ ایک کثیر تعداد مستطیل بلکروں میں منقسم ہو جائیگا جیسے $فان ق ر = مف س$ ہے۔

$$مف س = \frac{۱}{۲} (س + مف س) مف ط - \frac{۱}{۲} س مف ط$$

$$= س مف س + \frac{۱}{۲} مف س مف ط - \frac{۱}{۲} س مف ط \dots \dots (۱)$$

اب فصل (۳۱) کے تفاعل (لا، نا) کے عوض قطبی محدودوں والا ایک تفاعل استعمال



شکل III

کرنا ہوگا۔ فرض کرو کہ یہ فا (س' ط) ہے تو فصل (۳۱) کے عمل کے بموجب ایک نقطہ (س' ط) جزو رقبہ مف س کا منتخب کر کے خط مف کے اندر ہر مف س کے لیے حاصل ضرب فا (س' ط) مف س تیار کیا جاتا ہے اور ان سبھوں کو جمع کر لیا جاتا ہے اور بالآخر مف س ہے۔ اور مف ط ہے۔ ایسی تعدید کی صورت میں نصاب ہذا سے بلند تر نصاب کی کتابوں میں بتایا جاتا ہے کہ مف س کی بجائے صرف مر مف مر مف ط ہی لکھا جاسکتا ہے۔ پس

نہا ۳۳ فا (نہا) ہف ہف ط = ج فا (نہا) ہف ہف ط ... (۲)

اور یہ جملہ خطہ س کے اوپر تفاعل فارسطہ کا دھرا تکملہ کہلاتا ہے اور وہ متواتر تکملوں کے ذریعہ محسوب کیا جاتا ہے۔
(۲) کی سادہ ترین صورت خطہ س کے رقبہ کی تعیین ہے یعنی

رقبہ س = $\frac{1}{2} \times \text{اس فرط فرس} = \frac{1}{2} \times \text{اس فرس فرط} \dots (ز)$
 جبکہ رقبہ کسی منحنی اور اس کے دو سمتیہ مقطعوں سے محدود ہوتا ہے تو (ز) کی

حل سے ملی ترتیب مستطیل ہوتے ہیں۔
پھر ایسے بیٹوں کو ایک تراش مشق دھو سا ک ل میں جوڑ لینے
کے لیے بلحاظ مائیکل کیا جاتا ہے۔ اس مکمل میں ما کے حدود صفر اور

ب ۱ - ۱ - $\frac{1}{4}$ میں جو (۱۳) اور مخفی انزب کی مساوات $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1)$
کو حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں آخر میں ایسی تمام تراشوں کو اکٹھا کر لینے کے
لیے بلحاظ لا تمام خط ہر اب ج میں مکمل کیا جاتا ہے جس کے لیے لا کے
حدود صفر اور ہیں

$$\text{پس مطلوبہ حجم ج} = \int_0^1 \int_0^{1-\frac{1}{4}} \int_0^{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} dz dy dx \text{ فرلا فرما فری}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) dy dx \text{ فرلا فرما}$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1 - \frac{1}{4})^2 dx = \frac{\pi}{4} = \text{جواب}$$

مثالیں

(۱) تہرے مکمل سے چار سطحی مجسم کا حجم دریافت کرو جو محدود سطحوں اور

اور سستی $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ سے محدود ہے [جواب = $\frac{\pi}{4}$]

(۲) مندرجہ ذیل سطح سے محدود مجسم کا حجم معلوم کرو:-

$$y = 4 - x^2 - \frac{1}{4} \text{ اور } y = 3 + \frac{1}{4} \text{ [جواب} = \frac{\pi}{4}]$$

(۳) ص نصف قطر کے گڑھ کا مرکز ایک قائم دائری اسطوانہ کی سطح پر ہے جس کے

بائیسواں باب

معمولی تفرقی مساواتیں

۱۔ ہر ایک سائنس میں جب کبھی دو یا اس سے زیادہ امور کا باہمی تعلق مصرحہ حالات کے تحت ان کی ایک دوسرے کے لحاظ سے تبدیلی کی شرح کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے تو عموماً تفرقی مساواتیں استعمال کی جاتی ہیں جو احصاء کے مشتقات یا تفرقوں پر مشتمل ہوتی ہیں ان مساواتوں کو حل کر کے متغیروں کا باہمی رشتہ دریافت کیا جاتا ہے۔ بطور مثال،

فرما = $ف (لا) فرلا$
ایک آسان تفرقی مساوات ہے۔ اس میں لا اور ما کا درمیانی رشتہ معلوم کرنے کے لیے صرف عمل تکمیل کی ضرورت ہے۔ تفرقی مساواتوں کی عام تحقیق بذات خود ایک بسوط علم ہے جس کا اصل منشاء و مقصد یہ ہے کہ مختلف قسم کی مساواتوں کا مطالعہ کر کے ایسے طریقے دریافت کیے جائیں جن سے ان مساواتوں کے متغیروں کے باہمی تعلقات معلوم ہو جائیں۔

معمولی تفرقی مساواتوں سے مراد ایسی مساواتیں ہیں جن میں جزوی مشتقات یا تفرقے شریک نہیں ہیں۔ یہاں ہم صرف اس نوع کی مساواتوں سے بحث کریں گے۔

تفرقی مساوات کے رُقبہ سے مراد اس کے سب سے بلند مشق کا ہے۔
تفرقی مساوات کے درجہ کا مفہوم اس کے بلند ترین رتبہ کے
کا درجہ ہے۔ مثلاً

$$1 = \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{y}\right)^3 - 1 = 0$$

سے رتبہ اور تیسرے درجہ کی ہے۔

۱۔ تفرقی مساواتوں کا حصول۔

(۱) مساوات $1 = 2$ جب $1 = 2$...

رو۔ اس میں صرف ایک اختیاری مستقل ۱ ہے۔ اس کو لا انتہا
نیمتیں دی جاسکتی ہیں اور ان میں سے ہر ایک قیمت کے لیے
ت مذکور ایک معنی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لحاظ سے ایک مساوات
۱ ایک واحد اختیاری مستقل شامل ہے معنیوں کے ایک واحد نامتناہی
۱ کی نمائندہ ہے۔ تفرقی مساوات جو ایک ہی خاندان کے
۱ کی نمائندگی کرتی ہے ۱ کو اس طرح ساقل کرنے سے حاصل
ہے۔

$$\frac{x^2}{y} = 1 \text{ جم } 1 = \frac{x^2}{y} \text{ جب } 1 = 1 \text{ جم } 1$$

$$(2) \dots\dots\dots = 1 \text{ جم } 1 = 1 \text{ جم } 1$$

ات (۱) تفرقی مساوات (۲) کی ابتدائی (Primitive) کہلاتی ہے۔

ایک دوسری مثال $1 = 2$ کو $1 = 2$ ب (۳) ...
رو۔

ب خاص قیمت (بالفرض ۱) کے لیے ب کو قیمتوں کی ایک

نا ہی تعداد دی جاسکتی ہے اور قیمتوں کے ہر جفت یا جوڑ (۱، ۲) کے لیے مساوات (۳) ایک منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ اسی طرح ۲، ۱ کی خاص قیمت ۲ کے لیے ۱ کو قیمتوں کی ایک نامتناہی تعداد جاسکتی ہے جن میں سے ہر ایک ایک منحنی کی نمائندہ ہے۔ جب ۱ مساوات میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں تو اس کی ت کہا جاتا ہے کہ وہ منحنیوں کے ایک دہرے نامتناہی خاندان نمائندہ ہے۔ مساوات (۳) منحنیوں کے جس قبیلہ کو تعبیر کرتی ہے اسی لہ کو تعبیر کرنے والی تفرقی مساوات ۱ اور ۲ کے اسقاط سے اس ح حاصل کی جاسکتی ہے :-

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} \quad \text{پس} \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\text{اور} \quad \frac{f_2}{f_1} + \frac{f_1}{f_2} = 0 \quad (۴)$$

اوات (۳) تفرقی مساوات (۴) کی ابتدائی (Primitive) ہے یوں مندرجہ بالا مثالوں میں تفرقی مساوات جملہ اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے حاصل کی گئی ہے اور اس لیے اس میں ایسا فن شریک ہے جس کا رتبہ ابتدائی مساوات کے اختیاری مستقلوں خداو کے مساوی ہے۔ عام طور پر ثابت کیا جاسکتا ہے کہ فن اختیاری مل رکھنے والی ابتدائی مساوات کی تفرقی مساوات میں فن ہی درجہ کا فن ہوتا ہے اس سے بلند تر درجہ کا نہیں ہوتا۔

مثالیں

مندرجہ ذیل ابتدائی مساواتوں کی تفرقی مساواتیں حاصل کرو:-

$$(۱) \quad 1 + (۱ - ۲) = ۲ \quad \text{[جواب} \quad 1 + \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = 2 \text{]} \quad (۲) \quad 1 + (۱ - ۲) = ۲$$

$$(۲) \quad م = جب لا \quad \left[\text{جواب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\sqrt{م-۱}}{لا} = جب ۱ = \right]$$

$$(۳) \quad م = مو \quad \left[\text{جواب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱-اوکا}{ه} = \right]$$

$$(۴) \quad م = مس ۱ لا \quad \left[\text{جواب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{جب ۱۲}}{لا۳} = \right]$$

$$(۵) \quad س = ل (۱-جم ط) \quad \left[\text{جواب} \frac{\text{فرمس}}{\text{فرط}} - س = م \frac{ط}{۲} = \right]$$

۳۔ پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی تفرقی مساواتیں۔

ایسی مساوات

م فرلا + ن فرما = (۲)
کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔ جس میں م اور ن، لا اور ما کے تفاعل ہیں۔ اس شکل کی مساواتیں ذیل کی چار قسموں میں منقسم کی جاسکتی ہیں۔

قسم اول۔ متغیر جدائی پذیر۔ جب کسی تفرقی مساوات

کی قس میں اس طرح ترتیب دی جاسکتی ہیں کہ مساوات

$$(۱) \quad ف (لا) فرما + فا (ما) فرما = (۱)$$

کی شکل اختیار کر لیتی ہے جس میں ف (لا) صرف ما کا تفاعل ہے اور فا (ما) صرف ما کا تفاعل، تو اس ترتیب کو متغیروں کا جُدا کرنا کہا جاتا ہے۔ اور اس کا حل راست مکمل سے عمل میں آتا ہے چنانچہ

$$(۱) \quad کو مکمل کرنے سے \quad ف (لا) فرلا + ف (ما) فرما = ج (۲)$$

ما حل ہوتا ہے، جس میں ج ایک اختیاری مستقل ہے۔ ایسی مساوات کو

ایک مناسب جزو ضربی پر (جو عموماً مطالعہ سے معلوم ہو جاتا ہے) تقسیم کرنے سے اس کے متغیر اکثر جدا کر دیے جاسکتے ہیں۔

توضیحی مثال (۱) $\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}}$ فرما $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$ کو حل کرو

حل - کسری صاف کرنے سے $\sqrt{1-x^2} = 1-x^2 + \dots$ فرما =

اس کو $\sqrt{1-x^2} = 1-x^2 + \dots$ پر تقسیم کرنے سے $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} + \dots$ فرما =

اب چونکہ متغیر جدا کر دیے گئے ہیں راست تکمیل کرنے سے

جب 'ما' + جب 'لا' = ج (۱)

اس کو ہم ایک دوسری شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں:-

فرض کرو جب 'ما' = فہ اور جب 'لا' = سہ

اس لیے فہ + سہ = ج پس جب (فہ + سہ) = جب ج

یعنی جب فہ جم سہ + جم فہ جب سہ = ک جس میں ک ایک مستقل ہے۔

لیکن جب فہ = ما اور جب سہ = لا اور جم فہ = ک اور جم سہ = لا۔

∴ $\sqrt{1-x^2} = 1-x^2 + \dots$ ک (ب)

واضح ہو کہ (۱) اور (ب) دو علیحدہ حل نہیں ہیں بلکہ ایک ہی حل کی دو صورتیں ہیں اور ان میں صرف ایک ایک ہی اختیاری مستقل ہے

توضیحی مثال (۲) $\sqrt{1-x^2} = 1-x^2 + \dots$ فرما $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$ کو حل کرو۔

حل - چونکہ $\sqrt{1-x^2} = 1-x^2 + \dots$ فرما $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} + \dots$ اس لیے لا کو ی مانگ ہم لکھ سکتے ہیں

ی' فرما + فری = . پس فرما + فری =

چونکہ متغیر جدا ہو گئے ہیں اس لیے $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} + \dots$ فرما = ج

پس لا - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} + \dots$ ج جواب

مشائیں

دیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$1. \text{ جواب } \frac{جم}{قطا} \text{ فرلا} + \frac{جب}{جب} \text{ فرما} = 0. \quad \left[\text{جواب } \frac{جم}{قطا} - \frac{جب}{جب} = 1 \text{ جم} = 1 \text{ ج} \right]$$

$$2. (1 - لا') \frac{فرما}{فرلا} + لا = لا \quad \left[\text{جواب } \frac{1 - لا'}{لا - لا'} = 1 \text{ کوک} = \frac{1 - لا'}{لا - لا'} \text{ ج} \right]$$

$$3. \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + 1}{لا(لا + 1)} \quad \left[\text{جواب } (لا + 1)(لا + 1) = (لا + 1) \text{ ج} = لا \right]$$

$$4. لا(لا \frac{فرما}{فرلا} + لا) = لا \frac{فرما}{فرلا} \quad \left[\text{جواب } لا' = 1 \text{ کوک} = \frac{1}{لا} \text{ ج} \right]$$

$$5. لا' \frac{فرما}{فرلا} - لا' \frac{کوک}{لا} = 0. \quad \left[\text{جواب } \frac{1}{لا} - لا' = \frac{لا' کوک}{لا} \text{ ج} \right]$$

قسم دوم۔ متجانس مساواتیں۔

مساوات $مر فرلا + ن فرما = 0$ (۱)
 بانس کہلاتی ہے اگر $مر$ اور $ن$ لا اور ما کے اسی درجہ کے متجانس متعامل ہیں۔
 [نوٹ۔ لا اور ما کا متعامل اپنے متغیروں کے محاذ سے متجانس کہلاتا ہے
 لا اور ما کے بجائے لا اور لا (جن میں لا اختیاری ہے) تو بیض کرنے پر
 کسی قوت کا مضروب ابتدائی متعامل حاصل ہوتا ہے۔ لا کی یہ قوت ابتدائی
 عامل کا درجہ کہلاتی ہے۔]

ایسی تفرقی مساواتیں $ما = لا$ (۳)
 بیض کرنے سے حل کی جاسکتی ہیں۔ کیونکہ اس تعویض سے $و$ اور لا کی دقتوں
 میں ایک تفرقی مساوات دستیاب ہوتی ہے جس کے متغیر جدائی پذیر ہیں۔
 چنانچہ (۱) سے $\frac{فرما}{فرلا} = - \frac{ن}{م}$ (۴)

اور (۳) کو تفریق کرنے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$... (۵)

ا کا بائیں جانب کارکن عمل تعویض (۳) سے صرف و ہی کا متقابل ہو جاتا ہے بلکہ تعویض (۳) کو عمل میں لایا جاتا ہے۔ پس (۵) اور (۳) کو استعمال کر کے (۴) سے مل جاتا ہے

$$\text{لا} + \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{و} = \text{ف} (۶) \dots \dots \dots$$

رتخیر لا اور و ایک دوسرے سے جدا کر دیے جاسکتے ہیں۔

توضیحی مثال - تفریق سادات لا فرما = ما فرلا + (لا + ما) فرلا

مکمل حل پیش کرو۔

حل - سادات کو ترتیب دینے سے ما فرلا = (لا + ما) فرلا - لا فرما

اس میں مراورن علی الترتیب ما اور (لا + ما) فرلا ہیں اور دونوں متجانس۔ لا اور ما کے لحاظ سے پہلے درجہ کے ہیں۔

پس ما = ولا لکھنے سے فرما = و فرلا + لا فرو

لا (و فرلا + لا فرو) = ولا فرلا + لا + لا و فرلا

$$\therefore \text{لا فرو} = \text{لا} + \text{ولا} + \text{فرلا}$$

$$\text{لا} + \text{ولا} + \text{فرلا} \text{ پر تقسیم کرنے سے } \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + \text{ولا}} = \frac{\text{فرو}}{\text{لا} + \text{ولا}}$$

پس تکمیل کرنے سے ج + کوک لا = کوک (لا + ولا) (۷)

$$\text{ا کوک ج لا} = \text{کوک (لا + ولا)} \text{ اور ج لا} = \text{ولا} + \text{لا} + \text{ولا}$$

$$\therefore \text{ج لا} = \text{ولا} + \text{لا} + \text{ولا} \text{ مربع کرنے سے ج لا}^2 = ۲ \text{ ج لا} + \text{لا}^2 + \text{ولا}^2 + \text{لا} + \text{ولا}$$

پس ۲ + ج لا - ج لا = ۰ یعنی ۲ + ج لا - ج لا = ۰۔ جواب

مثالیں

مندرجہ ذیل تفرقی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱) $\sqrt{1 - 1^2}$ فرما $\sqrt{1 + 1^2}$ فرما [جواب: جب $1 = 0$ کو $ج (1 + 1^2)$]

(۲) $(1 + 1^2)$ فرما $(1 - 1^2)$ فرما $0 =$ [جواب: کو $(1 + 1^2) - 2$ سے $ج = \frac{1}{2}$]

(۳) $\frac{1}{1 + 1^2}$ فرما $\frac{1}{1 - 1^2}$ فرما [جواب: لا $\frac{1}{1 + 1^2} = ج$]

(۴) $(1^2 + 1^2 + 1^2)$ فرما $(1^2 - 1^2)$ فرما $0 =$ [جواب: $(1^2 + 1^2) - 2$ سے $ج = 1$]

(۵) ایک معنی مبدار میں سے گزرتا ہے اور جس کا اعلان ہر نقطہ پر $\frac{1^2 - 1^2}{1 + 1^2}$

کے مساوی ہے۔ اس کی مساوات دریافت کرو۔ [جواب: لا $\frac{1}{1 + 1^2} =$
نوٹ:- اگر مساوات $م$ فرما $ن$ فرما کے سرور اور $ن$ غلطی سے
 $1 + 1 + 1 + ج (جس میں ج = 0)$ کی صورت کے ہوں تو ذیل کے طریقہ سے
متغیر $ن$ کو جدا کر دیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱) تفرقی مساوات $1^2 + 1^2 + (1 - 1^2)$ فرما $0 =$ کو حل کرو۔

حل:- رتبوں کو ترتیب دینے سے $(1^2 + 1^2) - 2$ فرما $0 =$

فرض کرو $لا = 1 + 1$ اور $ما = 1 + 1$ یہ جن میں $ع$ اور $ع$ مستقل ہیں
پس $فرلا = فرلا$ اور $فرما = فرما$

تب $2 (1 + 1) (فرلا + (1 + 1 + 1^2 + 1^2 - 1) فرما = 0$ (۱)
دی ہوئی تفرقی مساوات متجانس بنائی جاتی ہے اگر یہ $0 =$ اور $ع + 1 - 1 =$
ان آخری مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرنے سے $0 =$ اور $ع = 1$
قسمیں برآمد ہوتی ہیں۔

اس لیے $لا = 1$ اور $ما = 1$

اب $ما = 1$ و $لا = 1$ اور $لا = 1$ اور $لا = 1$ میں توضیح کرو۔

تب ۲ و لا فر لا + (لا ۳ + لا و) (و فر لا + لا فرو) = ۰
 لا پر تقسیم کرنے اور سادہ کرنے سے ' ۲ و فر لا + و فر لا + لا ۳ + لا فر لا + لا فرو = ۰
 یعنی فر لا ۳ و (۱ + و) + فرو لا (۱ + ۳ و) = ۰

$$\text{پس } \frac{\text{فرو}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرو} (۱+۳)}{(۱+۳)۳} = ۰$$

اس مساوات کے سیدھے جانب کے رکن کی دوسری رقم کو جزوی کسو میں
 تحلیل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$\frac{\text{فرو}}{۳} \left(\frac{۱}{و} + \frac{ب}{۱+و} \right) = \frac{\text{فرو}}{۳} \left\{ \frac{۱ + (ب+۱)و}{(و+۱)و} \right\}$$

پس ۱ + و + ب و = ۱ + ۳ و اس لیے ۱ = ۱ اور ۱ + ب = ۳ ∴ ب = ۲

$$\text{اور } \frac{\text{فرو لا}}{۳} + \left\{ \frac{۲}{و+۱} + \frac{۱}{و} \right\} \frac{\text{فرو}}{۳} = ۰$$

پس تکمیل کرنے سے یک لا + ۱/۳ کوک و + ۲/۳ کوک (۱ + و) = ج

$$\therefore \text{لا و } \frac{۱}{۳} (۱ + و) = \frac{۲}{۳} \text{ ج اس لیے لا و } (۱ + و) = ۲ \text{ ک}$$

و کی قیمت ۱/۳ تقویض کرنے سے ما (لا + ما) = ک

لیکن لا = لا - ۱ اور ما = ما ∴ ما (لا + ما - ۱) = ک جواب

مثال (۲) تفرقی مساوات (۱ + ما + لا ۲) فر لا + (۲ - ما - لا ۲) فر ما = ۰

کو حل کرو۔

حل۔ لا = لا + عہ اور ما = ما + بہ لکھنے سے

$$(۲ + لا ۲ + عہ ۲ + ما + بہ + ۱) فر لا + (۲ - ما - لا ۲ - عہ ۲ - بہ) فر ما = ۰$$

مساوات کو متجانس بنانے کے لیے چاہیے کہ ۲ + عہ + بہ = ۱ اور ۲ - عہ - بہ = ۲

ان کو حل کرنے سے عہ = ۰ اور بہ = ۱ پس لا = لا اور ما = ما + ۱

$$\text{اب } (۲ + لا ۲ + ما) فر لا + (۲ - ما - لا ۲) فر ما = ۰$$

ا = لا و تعویض کرنے سے (۲ لا + لا و) فر لا + (۲ لا و - لا) (و فر لا + لا و) =
اس کو سادہ بنانے سے ۲ (۱ + و) فر لا + لا (۱ - و ۲) = و فر و

$$\therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} + \frac{\text{فر و} (1 - و ۲)}{۲ (۱ + و)} =$$

$$\text{پس } \int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} + \int \frac{\text{و}}{۱ + و} \text{ فر و} - \int \frac{۱}{۲} \text{ فر و} = ج$$

$$\text{یعنی لوگ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ لوگ } (۱ + و) - \frac{۱}{۲} \text{ مس ا و} = ج$$

$$\therefore \text{لوگ } \{ \text{لا} (۱ + و) \} - \frac{۱}{۲} \text{ مس ا و} = ج$$

$$\text{لیکن } و = \frac{۱}{لا} \text{ اور لا} = لا \text{ اور ا} = ما + ۱$$

$$\therefore \text{بالآخر لوگ } \{ \text{لا} (۱ + ما + ۱) \} + \text{مس } \frac{۱ + ما}{لا} = \text{جواب}$$

قسم سوم - مایں پہلے درجہ کی خطی تفرقی مساوات کی صورت

$$\text{فر لا} + پ ا = ق \dots \dots \dots (ب)$$

ہے جس میں پ اور ق صرف لا کے تفاعل میں یا مستقل

$$[\text{اسی طرح } \text{فر لا} + ہ لا = ع \dots \dots \dots (ج)]$$

جس میں ہ اور ع صرف ا کے تفاعل میں یا مستقل، ایک خطی تفرقی مساوات ہے

(ب) کو مکمل کرنے کے لیے فرض کرو کہ ما = سی (۱)
جس میں سی اور سی تعین طلب تفاعل لا ہیں - (۱) کو تفرق کرنے سے

$$\text{فر لا} = \text{فر لا} + \frac{\text{فر سی}}{\text{فر لا}} سی \dots \dots \dots (۲)$$

(۱) اور (۲) کو (ب) میں تعویض کرنے سے

$$\text{فر لا} + \frac{\text{فر سی}}{\text{فر لا}} سی + پ ا = ق$$

یعنی $\frac{فری}{فرلا} + \left(\frac{فری}{فرلا} + پ \right) ی = ق \dots\dots (۳)$

اب اگر $\frac{فری}{فرلا} + پ = ی \dots\dots\dots (۴)$ کو (جس میں
 و اداری جدائی پذیر ہیں) تکمیل کر کے و کی قیمت معلوم کر لی جائے تو
 لوک $ی = - پ \text{ و فرلا} + ج$

ج کو لوک $پ$ لکھنے سے بالآخر لوک $ی = - پ \text{ و فرلا}$ حاصل ہوتا ہے،
 پس $ی = ک \text{ و } - پ \text{ و فرلا} \dots\dots\dots (۵)$

و کی یہ قیمت (۳) میں تعویض کرنے سے $ک \text{ و } - پ \text{ و فرلا} = ق \text{ و فرلا}$
 یعنی فری $= \frac{ق}{س} \text{ و } - پ \text{ و فرلا}$

اس کو تکمیل کرنے سے $ی = \frac{ق}{س} \text{ و } - پ \text{ و فرلا} + ج$

لیکن $ی = ۱$ پس $۱ = ک \text{ و } - پ \text{ و فرلا} = \frac{ق}{س} (۱ \text{ و } - پ \text{ و فرلا} + ج) \dots\dots (۶)$

$۱ = ما = و - پ \text{ و فرلا} (۱ ق \text{ و } - پ \text{ و فرلا} + ج) \dots\dots (۷)$

توضیحی مثال - مالیت ل اور مراحت ز والے برقی دور کے
 سروں پر جب متقل محرک برق م عمل کرتا ہے تو دور میں برقی رو کے
 شو کا منابطہ حاصل کرو۔

حل - اس سوال کا مطلب تفرقی مساوات ل $\frac{فری}{س} + و = م$
 حاصل ہے۔ جس میں ر کسی آن و میں دور پر سے پہنچنے والی رو کی
 قیمت ہے۔

نکہ $\frac{فر}{فر} + \frac{ن}{ن} = \frac{م}{ن}$ مصرعہ بالا قسم سوم کی مساوات
اس لیے

$$= \frac{فر}{فر} + \frac{ن}{ن} = \frac{م}{ن} \quad (فر + ن = ج)$$

$$= \frac{فر}{فر} + \frac{ن}{ن} = \frac{م}{ن} \quad (فر + ن = ج)$$

کے شرائط کے لحاظ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$جب و = ۰ \text{ تو } ر = ۰ \text{ پس } ج = \frac{م}{ن}$$

$$ج = ۰ \text{ -- } \frac{م}{ن} = ر \quad (۱ - \frac{فر}{ن}) \quad \text{جواب}$$

بات کے طالب علم کو معلوم ہو گا کہ یہ بلیم ہولٹس (Helmholtz) کا
وہ مزاحمت والے برقی دور میں تو کے ٹوکا مشہور کلیہ ہے۔

قسم چہارم۔ پہلے رتبہ کی غیر خطی مساواتیں
ب تو فیض سے خطی بنائی جاسکتی ہیں۔ ان کی ایک صورت

$$\frac{فر}{لا} + پ = ق = ۱ \quad (۵)$$

ن میں پ اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں یا مستقل

مساواتیں بذریعہ تو فیض ی = م^۱ خطی صورت (ب) قسم سوم
لی ہو سکتی ہیں۔ لیکن ضرور نہیں کہ یہی تحول عمل میں لائی جائے
قسم سوم کے عنوان کے تحت مساواتوں کے حل کے لیے استعمال
تجایہاں بھی کام دے سکتا ہے۔ ایک مثال سے اس کی توضیح
ہے۔

$$\frac{فر}{لا} + \frac{پ}{لا} = ۲ \quad \text{مثال} \quad \text{وضیحی مثال}$$

حل۔ یہ مساوات (د) کی صورت کی ہے جس میں پ = $\frac{1}{11}$

ق = ۲، ل = ۱، ن = ۱، ۲ = ۱، ی = ۱، کھوتب = $\frac{فری}{فرلا}$ ، $\frac{فری}{فرلا} + \frac{فری}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا}$ ، اس کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{فری}{فرلا} + \left(\frac{فری}{فرلا} + \frac{فری}{فرلا} \right) = ی \left(\frac{فری}{فرلا} + \frac{فری}{فرلا} \right) = ۲ \text{ لوک لا} \text{ و } ی \dots (۱)$$

و کو معلوم کرنے کے لیے ی کے سرے سے $\left(\frac{فری}{فرلا} + \frac{فری}{فرلا} \right)$ کو صفر کے مساوی لکھتے ہیں۔

$$\text{پس اس کے عمل سے } \frac{فری}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا} - \frac{فری}{فرلا} \text{ یعنی لوک لا} = \frac{فری}{فرلا} \text{ لوک لا} = \frac{فری}{فرلا}$$

$$\frac{فری}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا} \dots (۲)$$

اب چونکہ ی والی رقم نکل جاتی ہے اس لیے مساوات (۱) اب ہو جاتی ہے

$$\frac{فری}{فرلا} = ۲ \text{ (لوک لا)} \text{ و } ی \text{ یا } \frac{فری}{فرلا} = ۲ \text{ لوک لا} \text{ و } ی$$

اس میں و کی قیمت $\left(\frac{فری}{فرلا} \right)$ تعویض کرنے سے $\frac{فری}{فرلا} = ۲ \text{ (لوک لا)} \text{ و } ی$

$$\frac{فری}{فرلا} = ۲ \text{ (لوک لا)} \text{ و } ی$$

$$\text{اس کو عمل کرنے سے } \frac{فری}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا} + \frac{فری}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا}$$

$$\frac{فری}{فرلا} = ی \text{ و } ی = \frac{فری}{فرلا}$$

$$\text{اور چونکہ } ی = ۱ \text{ اس لیے } \frac{فری}{فرلا} = ۱ \text{ و } ی = ۱ \text{ و } ی = ۱$$

$$\text{یا } ۱ = ۱ + \{ ۱ + ۱ \} \text{ جواب}$$

مثالیں

مندرجہ ذیل تفرقی مساواتوں کو مکمل طور پر حل کرو۔

- (۱) فرس / فرو = جم و + س جب و = ۱ [جواب 'س = جب و + جم و]
- (۲) فرما / فرلا = ن / لا = ۱ + لا [جواب 'ما = ج لا + ۱ - لا - ۱/لا]
- (۳) فرما / فرلا = ۲ / ۱ + لا + فرلا / فرلا [جواب '۱۰ = ۲(۱ + لا) - لا - ۱۰ + لا + ۱۰ + لا + ۱۰]
- (۴) فرما / فرلا = ۲ / ۱ + لا + فرلا / فرلا [جواب 'ما = ج و + لا - لا / ۱ + لا]
- (۵) فرما / فرلا = ۲ / ۱ + لا + فرلا / فرلا [جواب 'ما = ۲(۱ + لا) - مس' لا + ج]
- (۶) فرس / فرو - س مم و = س قم لا [جواب 'س = س مم و + ج]
- (۷) ثابت کرو کہ متبادل برقی روؤں سے متعلق تفرقی مساوات ل فرس / فرو + زر = س مم جب سہ و جس میں ل' ز اور سہ مستقل ہیں
- (زر جب سہ و - س ل جم سہ و) + ج و = سہ -

۴۔ ٹھیک یا تیار تفرقی مساواتیں۔ مساوات

- (۱) ہر فرلا + ن فرما = (۱)
- ٹھیک یا تیار کہلاتی ہے اگر کوئی تفاعل (لا' ا) ایسا موجود ہے کہ اس کا تفرقہ (differential)
- فرت (لا' ا) = ہر فرلا + ن فرما = (۲)

اگر (۱) ٹھیک یا تیار تفرقی مساوات ہے تو ہر اور ن کے مابین ایک سادہ رابطہ موجود ہے جو اس طرح دریافت کیا جاتا ہے۔ واضح ہے کہ ف (لا، ما) کے تفرق کے لیے عام جملہ ہے۔

$$\text{فرق (لا، ما)} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ن}}{\text{جف ما}} \text{ فرما}$$

$$\text{پس (۲) سے م} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} \text{ اور ن} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف ما}}$$

$$\text{اور جف م} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} \quad \text{اور جف ما} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$$

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{جف م}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} \quad \dots \dots \dots (۳)$$

اس کے معکوس طریقہ پر یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر حل (۳) صحیح ہے تو ایک تفاعل ف (لا، ما) ایسا موجود ہے جس کے لیے رابطہ (۲) صحیح ہے یعنی بالفاظ دیگر مساوات (۱) ٹھیک یا تیار مساوات ہے۔

یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ ہر ایسی مساوات کے لیے جو ٹھیک نہیں ہے ایک ایسا جزو ضربی موجود ہے جو ایسی مساوات کو ضرب دینے پر ٹھیک بنا دیتا ہے۔ ایسے اجزاء ضربی جو متکمل اجزاء ضربی کہلاتے ہیں عموماً لا اور ما کے تفاعل ہوتے ہیں۔ ان کے دریافت کرنے کا کوئی عام قاعدہ موجود نہیں ہے جیسا کہ آگے چل کر بتایا جائیگا یہ زیادہ تر مطالعہ یا پرکھنے ہی سے معلوم کر لیے جاتے ہیں۔

ٹھیک مساوات کے حل کرنے کا قاعدہ۔ مثال کے

طور پر مساوات

$$(لا - لا ۲ - ما ۲ - ا) + (فرلا + لا ۲ - لا ۲) = ۰$$

کے حل پر غور کرو۔ پہلے یہ دیکھنے کے لیے کہ مساوات ٹھیک ہے یا نہیں

جنت م اور جنت ن کا مقابلہ کرو چونکہ ان دونوں کی قیمت ایک ہی
یعنی ۱۲-۱۲ ہے اس لیے مساوات ٹھیک ہے۔
اب اگر ت (لا'ا) = ج اس کا مل ہے تو

م = جنت ن (لا'ا) اور ن = جنت م (لا'ا)
ہا کو مستقل تصور کر کے ہر کو تکمیل کرنے سے

ن (لا'ا) = (لا'ا-۱۲-۱۲) فلا + فہ (ما) = لا'ا-۱۲-۱۲+فہ (ما)
جس میں فہ (ما) بمواظ لا مستقل ہے لیکن مکن ہے کہ اس میں لا شامل ہو۔
اب لا کو مستقل تصور کر کے تفرق کرنے سے

جنت م (لا'ا) = لا'ا-۱۲-۱۲+جنت فہ (ما) = ن-۱۲-۱۲
∴ جنت فہ (ما) = ن-۱۲-۱۲ = لا'ا-۱۲-۱۲ ج

پس دی ہوئی تغزنی مساوات کامل ہے لا'ا-۱۲-۱۲+لا'ا-۱۲-۱۲=ج
اس جملہ کی پہلی تین رقمیں ہر کو تکمیل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں یہ تصور کر کے کہ
مستقل ہے۔

باقی ماندہ رقم لا'ا ہی ن فرما کے مکمل میں ایک ایسی رقم ہے جو پہلے حاصل
کی ہوئی رقموں کے مختلف ہے۔

اس لیے قاعدہ یہ ہے کہ ہر فرما کو مکمل کیا جائے یہ تصور کر کے کہ
مستقل ہے۔ پھر ن فرما کو مکمل کیا جائے یہ تصور کر کے کہ لا مستقل ہے لیکن
اس تکملہ میں سے صرف وہی رقمیں لی جائیں جو پہلے حاصل نہیں ہوئی ہیں۔ اور
بعد ازاں ان نمبروں کے حاصل جمع کو ایک مستقل کے مساوی
تکملہ دیا جائے۔

مثال دوم۔ $\frac{لا - ما}{لا + ما} فرلا + \frac{لا + لا}{لا + لا} فرما =$ کو مل کر دو۔

حل۔ چونکہ جف م = $\frac{لا - لا - لا - لا}{لا + لا} = \frac{لا - لا - لا - لا}{لا + لا}$ جف ن اس لیے مساوی

ٹھیک ہے۔

پس اس کا ف (لا، ما) موجود ہے اور

$$\frac{لا - لا}{لا + لا} = م = \frac{جف ن (لا، ما)}{جف لا}$$

اس کو جزوی طور پر لہذا لا تکمل کرنے سے (یعنی یہ تصور کر کے کہ مستقل ہے)

$$ن (لا، ما) = \int \frac{لا - لا}{لا + لا} فرلا = \int \frac{لا فرلا}{لا + لا} - \int \frac{لا فرلا}{لا + لا}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{لا فرلا}{لا + لا} - \frac{1}{4} \int \frac{لا فرلا}{لا + لا} = \frac{1}{4} \int \frac{لا فرلا}{لا + لا} - \frac{1}{4} \int \frac{لا فرلا}{لا + لا}$$

$$+ ذ (ما) \dots \dots (1)$$

اس طرح $\frac{جف ن (لا، ما)}{جف لا} = ن = \frac{لا + لا}{لا + لا}$ اور اس کو جزوی طور پر لہذا لا تکمل کرنے سے

$$ن (لا، ما) = \int \frac{لا + لا}{لا + لا} فرما = \frac{1}{4} \int \frac{لا + لا}{لا + لا} + مس ا \frac{لا}{لا}$$

$$+ سہ (لا) \dots \dots (2)$$

(1) اور (2) میں ن (لا، ما) کے لیے جو جملے حاصل ہوئے ہیں ان کے مساوی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ

$$- مس ا \frac{لا}{لا} + ذ (ما) = مس ا \frac{لا}{لا} + سہ (لا) ایک$$

متماثلہ (Identity) ہو۔

لا فرلا + مافرما + (لا + ما) فرلا = ۰ (۱)
 ٹھیک مساوات نہیں ہے۔ لیکن ذرا سوچنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ
 اگر اس کو $\frac{1}{لا + ما}$ سے ضرب دیا جائے تو وہ ٹھیک بن جاتی ہے کیونکہ
 وہ ہو جاتی ہے

$$\frac{لا فرلا + مافرما}{لا + ما} + فرلا = \frac{1}{لا + ما} فر (لا + ما) + فرلا$$

جس کا تکملہ ہے $\frac{1}{لا + ما} لوک (لا + ما) + لا = ج$

دوسری مثال - اکثر مثالوں میں (ما فرلا - لا فرما) رقبوں
 کے مجموعہ سے سابقہ پڑتا ہے۔ اگر مساوات میں صرف یہی دو رقبیں مفر کے
 مساوی دی گئی ہیں تو ایسی مساوات کے لیے

$$\frac{1}{لا} یا \frac{1}{ما} یا \frac{1}{لا + ما}$$

تکملہ جزو ضربی کا کام دے سکتے ہیں۔ اس لیے کہ

$$\frac{ما فرلا - لا فرما}{لا} = فر (لا) دو مقادیر کے خارج قسمت کے تعریفی سر کی$$

تعریف سے

$$پس \frac{ما فرلا - لا فرما}{لا} = کامل کر فر (لا) = یعنی \frac{لا}{لا} = ج ہے$$

$$اسی طرح \frac{لا فرلا - ما فرما}{لا} = \frac{لا فرلا - ما فرما}{لا} = فر (لا) ہے پس مساوات کا$$

حل - $\frac{لا}{لا} = ج ہے$

$$اور \frac{ما فرلا - لا فرما}{لا} = فر (لا) پس مساوات کا$$

$$لوک لا - لوک ما = ج یعنی \frac{لا}{لا} = ج ہے$$

[نوٹ - ٹیک مساواتوں کے امتحان کے طریقے سے معلوم کر لیا جاسکتا ہے کہ
ہوئی مساوات ان ٹیکل اجزاء ضربی میں سے کسی ایک سے بھی ضرب دینے کے بعد ٹیک
جاتی ہے۔ غالب علم بلوچن ٹیک مساواتوں کے حل کرنے کے عام قاعدہ سے بھی اس
مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔]

اگر مثال میں (ما فرلا - لا فرما) کے علاوہ دوسری رقمیں بھی شامل ہیں تو
ٹیکل جزو ضربی کا انتخاب ایسا ہونا چاہیے کہ اس سے دوسری رقموں کے
مل میں رکاوٹ پیدا نہ ہو۔

مثلاً مساوات ما فرلا - لا فرما + لوک لا فرلا = . کے حل میں ٹیکل
جزو ضربی $\frac{1}{لا}$ کا استعمال غیر مفید ہوگا البتہ $\frac{1}{لا}$ استعمال کرنے
سے فوراً مطلب محل ہو جاتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{ما فرلا - لا فرما}{لا} + \frac{لوک لا فرلا}{لا} = . \text{ کا حل}$$

$$- \frac{1}{لا} + \left[\frac{لوک لا}{لا} + \frac{فرلا}{لا} \right] = ج$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{لا} - \frac{لوک لا}{لا} - \frac{1}{لا} = ج \text{ یا } 1 + لوک = ج لا$$

مثالیں

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:-

(۱) لا فرما + $\frac{لا}{لا}$ فرما = ما فرلا [جواب: $\frac{1}{لا} + لوک = ج$]

(۲) (۱ + لا) ما فرلا + (۱ - لا) لا فرما = . [جواب: $لوک - \frac{1}{لا} = ج$]

(۳) لا فرلا + ما فرما - $\sqrt{لا^۲ + ۱}$ فرلا = . [جواب: $لا + ۱ - \sqrt{لا^۲ + ۱} = ج$]

(۴) ما فرلا - لا فرما + (لا + لا) فرما = . [جواب: $۱ + \frac{لا}{لا} = ج$]

(۵) $(۱+۱) (۱+۱) (۱+۱) + (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) = ۱$ ۔ [جواب: $\frac{1}{2} (۱+۱) (۱+۱) (۱+۱) = ۱$ ج

۶۔ پہلے رتبہ کی مساواتیں جو پہلے درجہ سے بلند تر درجہ کی ہیں۔

قسم اول۔ مساواتیں جو $\frac{1}{x}$ کے لیے حل کی جاسکتی ہیں۔

بطور مثال۔

$$ع^۳ (۱+۱) + ع^۲ (۱+۱) + ع (۱+۱) = ۱ \text{ کو حل کرو۔}$$

[نوٹ۔ یہاں ع سے مراد $\frac{1}{x}$ ہے سہولت کی خاطر کتابت کا یہ طریقہ اختیار کیا گیا ہے۔]

حل۔ مساوات کے سیدھے جانب کے کرن کو اس کے اجزاء ضربی میں تحلیل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

$$ع = \{ (۱+ع) (۱+۱) + (ع+ع^۲) (۱+۱) \}$$

$$\text{یعنی } ع (۱+ع) = (۱+۱) + ع (۱+۱) + ع^۲ (۱+۱)$$

$$\text{پس } \frac{1}{x} = ۱ + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \text{ یا } ۱ = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

پہلی دو مساواتوں کو مکمل کرنے سے $ع = ۱ - ع$ اور تیسری مساوات ہے $ع = ۱ - ع - ع^۲$ ۔

$$\text{یعنی } ع = ۱ - ع - ع^۲ \text{ یا } ع = ۱ - ع - ع^۲$$

$$\therefore \text{ پھر اصل ہے } (ع-۱) (ع-۱) (ع-۱) = ۱$$

قسم دوم۔ مساواتیں جو λ کے لیے حل کی جاسکتی ہیں۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے۔

$$(1) \quad \dots\dots\dots = (\lambda, \mu, \nu)$$

اس کو λ کے لیے حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتی ہے مساوات

$$(2) \quad \dots\dots\dots = \lambda (\lambda, \mu, \nu)$$

(۲) کو تفریق کرنے سے اور $\frac{\lambda}{\mu}$ کے بجائے λ لکھنے سے ہمیں ملتی ہے مساوات

$$(3) \quad \dots\dots\dots = \lambda (\lambda, \mu, \nu)$$

جس میں λ اور μ متغیر ہیں۔ اب فرض کرو کہ (۳) کا حل ہے

$$(4) \quad \dots\dots\dots (\lambda, \mu, \nu)$$

تو λ کو (۱) اور (۴) کے بائیں ساقط کرنے سے ہمیں λ, μ کا ایک فعال اور ایک اختیاری مستقل دستیاب ہوتا ہے جو عموماً (۱) کا حل ہے۔ لیکن ممکن ہے کہ اس حل کے دوران میں بعض غیر متعلقہ اجزاء ضربی داخل ہو جائیں یا کسی اور طرح سے کوئی خطا واقع ہو اس لیے بہتر ہے کہ حاصل کردہ حل کو مساوات (۱) میں تعویض کر کے آزمایا جائے۔

اگر λ کا استقاط شکل ہو تو مساواتوں (۱) اور (۴) ہی کو ہر دو طریقہ پر حل کا مبدلہ لائنہ اظہار (parametric representation) تصور کر لیا جاسکتا ہے۔

مثال۔ مساوات $\lambda + \mu + \nu = 1$ کا حل کرو۔

$$\text{حل۔ تفریق کرنے سے } \lambda + \mu + \nu = 1$$

$$\therefore = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ع}^2 \text{ فرع}}{\text{ع}^2 - \text{ع} + 1}$$

$$\therefore = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} + \frac{\text{فرع}}{\frac{1}{\text{ع}} + \left(\frac{1}{\text{ع}} - \text{ع}\right)} + \frac{\text{فرع} (1 - \text{ع}^2)}{\text{ع}^2 - \text{ع} + 1}$$

اس کو تکمیل کرنے سے لوک (ع^۲ - ع + ۱) + $\frac{2}{\text{ع}}$ مس^۲ $\frac{1 - \text{ع}^2}{\text{ع}}$ + لوک لا = ج
ع کو دی ہوئی امداد آخری مساواتوں سے ساقط کیا جاسکتا ہے۔ لیکن سہولت کی
خاطر ع کو مبدل تصور کر کے اس کی رقوموں میں ان دونوں مساواتوں کو
عام حل قرار دیا جاسکتا ہے۔

کلیروی صورت (Clairaut's form) قسم دوم کی

مساواتوں میں اس کو خاص اہمیت حاصل ہے۔ اس کی صورت

$$\text{لا} = \text{ع} + \text{لا} + \text{ف} (\text{ع}) \text{ ہے۔}$$

اس کو ملحوظ لا تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ع} = \text{ع} + \text{لا} + \text{ف} (\text{ع}) \left\{ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \right\}$$

$$\therefore \text{لا} + \text{ف} (\text{ع}) = \text{ع} \therefore \text{یا} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ع}$$

پہلی مساوات سے عام حل حاصل نہیں ہو سکتا۔ دوسری مساوات سے

ع = ج (جو ایک مستقل ہے) برآمد ہوتا ہے اور ع کی یہ قیمت
ابتدائی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں عام حل

$$\text{لا} = \text{ج} + \text{لا} + \text{ف} (\text{ج}) \text{ دستیاب ہوتا ہے۔}$$

پس کلیروی مساوات کا عام حل دی ہوئی مساوات میں ع کے عوض
مستقل ج گھسنے سے فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

قسم سوم۔ مساواتیں جو لا کے لیے حل کی جاسکتی ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات کو لا کے لیے حل کرنے سے

نتیجہ لا = ف (ما'ع) (۱)
برآمد ہوتا ہے۔ تو اب (۱) کو بلحاظ ما تفریق کرنے سے

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{۱}{ع} = ف (ما'ع) \left(\frac{فرع}{۱} \right)$$

فرض کرو کہ (۲) کل حل ہے۔ سہ (ا'ع'ج) = (۳)
تو (۱) اور (۳) کو ہمزاد طریقہ پر مساوات (۱) کا مبدلہ حل تصور کیا جاسکتا
ہے یا اگر مناسب ہو تو ان کے مابین ع کو ساقط کر کے لا اور ما اور ایک
اختیاری مستقل کا تفاعل حاصل کیا جاسکتا ہے جو (۱) کا عام حل ہے۔
لیکن اس تفاعل کو دی ہوئی مساوات (۱) میں تعویض کر کے امتحان کر لیا جاتا
ہے۔ مثال - مساوات لا = ع + ما + ع کو حل کرو۔

[نوٹ - درحقیقت اس مساوات کا حل نہایت آسان ہے اس لیے کہ اس کے
متغیر جدائی پذیر ہیں یہاں اس کو قسم سوم کے تحت لاکر اس کے حل کی مشق کرائی مقصود ہے۔
 واضح ہے کہ یہ مساوات قسم دوم کی بھی تصور ہو سکتی ہے اس لیے کہ ما = $\frac{۱}{ع} - ۱$ لیکن
اس طور پر اس کو حل کرنے میں عمل مکمل قدرے لمبیل ہو جاتا ہے۔]
حل - مساوات کو بلحاظ ما تفریق کرنے سے

$$\frac{۱}{ع} = ع + ۱ + \frac{فرع}{۱} + \frac{فرع}{ع} \text{ یعنی } \frac{فرع}{ع} + \frac{فرع}{۱} + \frac{۱}{ع} = ۱$$

مکمل کرنے سے کوک (ع-۱) + ۲ کوک (۱+۱) = کوک ج

$$یا (ع-۱)(۱+۱) = ج$$

دی ہوئی مساوات اور آخری مساوات کے درمیان ع کو ساقط کرنے سے
حاصل ہوتی ہے مساوات

$$لا - (۱+۱) = ج \text{ جو دی ہوئی مساوات کا عام حل ہے۔}$$

مشالیں

[ہذا آیت۔ پہلی تین مشالیں مساوات قسم اول کے طریقہ سے حل کی جائیں۔
بعد کے باغیچہ قسم دوم کے طریقہ سے اور آخری تین قسم سوم کے طریقہ سے]۔

$$(۱) ۴ا'ع' + ۲ع'لا + (۱+۷۲)لا = ۳۷۲$$

$$\text{جواب: } (لا + ۲ا' - ج) (لا + ا' - ج) =$$

$$(۲) ۲ع' + (۱-لا)ع' - لا = ۱۰ \quad \text{جواب: } (۱ + \frac{۷}{۲}ج + لا) (لوک - لا + ج) =$$

$$(۳) ۲ع' - (1) = \frac{1}{11} \quad \text{جواب: } (۱ - لوک - لا - ج) (۱ + لوک - لا - ج) =$$

$$(۴) لا + ا' - ع' = ۱۰ \quad \text{جواب: } \left. \begin{array}{l} لا - ع' - ۲لوک (۱+ع) + ج \\ ۱ - ع' - ۲لوک (۱+ع) - ج \end{array} \right\}$$

$$(۵) ۱ = ع' (ع' + ۱) - لا = ۱۰ \quad \text{جواب: } \left. \begin{array}{l} \frac{ع'}{ع' + ۱} = لا \\ \frac{ع'}{ع' + ۱} = ۱۰ \end{array} \right\}$$

$$(۶) لا - ع' = ع' \quad \text{جواب: } \left. \begin{array}{l} \frac{ع'}{ع' - ۱} = لا \\ \frac{۱}{ع' - ۱} + ع' = ۱۰ \end{array} \right\}$$

$$(۷) ۱ = ع' لا + ۱ + ع' \quad \text{جواب: } ۱ = ع' لا + ۱ + ع' + ۱ + ع' \quad \text{بوجہ یکدروی صورت}$$

$$(۸) ۱ = ع' لا + ج + ع' \quad \text{جواب: } ۱ = ع' لا + ج + ع' + ج + ع' \quad \text{ایسا}$$

$$(۹) ۱ = ع' لا - \frac{۱}{ع'} + ۱ = ۱۰ \quad \text{جواب: } \left. \begin{array}{l} \frac{۱}{ع'} - \frac{۱}{ع'} = لا \\ ۱ = لوک + ع' + \frac{۲}{ع'} \end{array} \right\}$$

$$(۱۰) ۱ - ع' لا + ع' = ۱۰ \quad \text{جواب: } \left. \begin{array}{l} لا = ج + \frac{۱+ع'}{ع'} \\ \frac{ع'}{ع'} - \frac{۱}{ع'} = ۱۰ \end{array} \right\}$$

(۱۱) لا = ا + ع } جواب
 $\left. \begin{aligned} ۱۱ - ع - ۲ - کوک (۱ - ع) + ج \\ ۱ - ع - ۲ - کوک (۱ - ع) + ج \end{aligned} \right\}$
 یک۔ بلند تر رتبہ کی دو خاص قسم کی تفسیر کی
 مساواتیں۔

(۱) مساوات $\frac{فر۱}{فرلا۱} = ف (لا) یا ج \dots \dots (۵)$

سے اکثر سابعہ پڑتا ہے،
 علامت مساوات کے دونوں ارکان کو فرلا سے ضرب دو۔ عمل تکمیل سے

$\frac{فر۱ - ۱}{فرلا۱ - ۱} = ف (لا) فرلا + ج، یا = ف (ج) فرلا + ج،$
 اس عمل کو (ن - ۱) مرتبہ دہرانے سے پورا حل حاصل ہوتا ہے جس میں
 ن اختیاری مستقل ہونگے۔

توضیحی مثال۔ $\frac{فر۳}{فر۱} = لا و لا کو حل کرو۔$

حل۔ دونوں ارکان کو فرلا سے ضرب دیکر تکمیل کرنے سے

$\frac{فر۳}{فرلا} = ف لا و لا فرلا + ج، لا = \frac{فرلا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} + ج (عمل تکمیل باحصص سے)$

اس طریقہ کو دہرانے سے $\frac{فر۳}{فرلا} = ف لا و لا فرلا - ف \frac{فرلا}{فرلا} + ج، فرلا$

$= \frac{۱}{فرلا} - \left(\frac{فرلا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} \right) + ج، فرلا + ج،$

$= \frac{لا و لا}{فرلا} - \frac{فرلا}{فرلا} + ج، فرلا + ج،$

پس $\frac{۱}{فرلا} = ف لا و لا فرلا - \frac{فرلا}{فرلا} + ج، فرلا + ج، فرلا$

$$= \frac{1}{1} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} \right) - \frac{2}{1} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \frac{1}{1} - \frac{2}{1} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} \quad \text{جواب}$$

$$(۲) \text{ مساوات - } \frac{1}{1} \frac{1}{1} = \text{ن (۱)} \dots \dots \dots (۹)$$

کو بڑی اہمیت حاصل ہے۔ اس کے حل کے لیے سہولت کی خاطر فرما کے عوض لکھو تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} = \text{ن (۱)}$$

اب ۲ ع سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے -

$$۲ ع \frac{1}{1} \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \frac{1}{1} (۲ ع) = ۲ ع \text{ ن (۱)} = ۲ \text{ ن (۱)} \frac{1}{1} \frac{1}{1}$$

$$\text{پس } ۲ \text{ ن (۱)} = ۲ \text{ ن (۱)} \frac{1}{1} \frac{1}{1}$$

اور مکمل کرنے سے ۲ ع = ۲ ن (۱) فرما + ج

اس آخری مساوات کے بائیں جانب کارکن کا تفاعل ہے۔ پس جذرا المربع نکال کر متغیروں لا اور ما کو جدا کر دو اور پھر سے مکمل کرو۔ جواب حاصل ہو جاتا ہے -

$$\text{توضیحی مثال - مساوات } \frac{1}{1} \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \frac{1}{1} = ۰ \text{ کو حل کرو۔}$$

$$۲ ع سے ضرب دینے سے ۲ ع \frac{1}{1} \frac{1}{1} = ۲ \frac{1}{1} \frac{1}{1} \text{ فرما بیضے } (۲ ع) = ۲ - ۲ \frac{1}{1} \frac{1}{1}$$

$$\text{مکمل کرنے سے } (۲ ع) = ۲ - ۲ \frac{1}{1} \frac{1}{1} \text{ فرما بیضے } = ۲ - ۲ \frac{1}{1} \frac{1}{1} + ج$$

جس میں ج = اختیاری مستقل

$$\therefore ۲ ع = \pm \frac{1}{1} \frac{1}{1} - \frac{1}{1} \frac{1}{1} \text{ لیکن } ۲ ع = \frac{1}{1} \frac{1}{1}$$

پس تغیروں کو جدا کر کے مکمل کرنے سے

$$\text{کہ } \frac{\text{فرما}}{\text{راج} - \frac{1}{11}} = \text{فرما} \text{ یعنی } \text{کہ } \frac{\text{فرما}}{\frac{1}{11} - \frac{1}{11}} = \text{لا} + \text{ج}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{11} \text{ جب } \frac{1}{11} = \text{لا} + \text{ج}$$

$$\text{یہ } \frac{1}{11} = \text{جب} (\text{لا} + \text{راج})$$

$$\text{اور } 1 = \text{ج} (\text{جب لا جم } \text{راج} + \text{جم لا جب } \text{راج})$$

$$\text{یعنی } 1 = \text{ج جب لا} + \text{ج جم لا}$$

[طبیعیات کے طالب علم کو معلوم ہو گیا ہو گا کہ مندرجہ بالا مثال میں اگر بجائے نقل مکان میں لکھا جائے بجائے لا وقت و اور بجائے زاویہ رفتار سے تو مساوات سادہ موسیقی حرکت کی ہو جاتی ہے جس میں اسراع نقل مکان کے راست متناسب ہے لیکن مخالف سمت میں۔

$$\text{اس حرکت میں رفتار } r = \frac{\text{فرس}}{\text{فر}} = \text{س} (\text{ج جم س} - \text{ج جب س})$$

جس وقت $r = 0$ نقل مکان اعظم ہوتا ہے

$$\text{اور ج جم س} = \text{ج جب س} \text{ یعنی مس س} = \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

$$\text{اس لیے جب س} = \frac{\text{ج}}{\text{راج} + \frac{1}{11}} \text{ اور جم س} = \frac{\text{ج}}{\frac{1}{11} + \text{راج}}$$

$$\text{اور اعظم نقل مکان یا محیط ارتعاش} = \text{راج} + \frac{1}{11}$$

$$\text{دراخورد کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ وقت دوران } = \frac{2\pi}{\text{فر}}$$

مثالیں

(۱) اگر کوئی ذرہ خط مستقیم میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا اسراع اس کے نقل مکان کے راستہ متناسب اور نقل مکان ہی کی سمت میں ہو تو ایسی حرکت کی تفریق مساوات ہے

$$\frac{f^2}{w} = k^2 s$$

ثابت کرو کہ اس کا حل ہے $s = w^2 + b^2$ یا $a^2 + b^2 = w^2$ جبکہ w و b جزک و ثابت جزک و

$$(۲) \frac{f^2}{w} = ۴ \text{ جب } ۲ \text{ و } ۱ \text{ کا حل ہے } ۱ = ۲ + ۱ \text{ جب } ۲ + ۱ = ۲ + ۱$$

$$(۳) \frac{f^2}{w} = \frac{۱}{۱۱} \text{ کا حل ہے } ۲ = ۱ + ۱ \text{ جب } (۱ + ۱) = ۲ \text{ جب } ۱ + ۱ = ۲$$

$$(۴) \frac{f^2}{w} = ۱ \text{ کا حل ہے } ۱ = ۱ + ۰ \text{ جب } ۱ = ۱ + ۰$$

$$(۵) \frac{f^2}{w} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۲ \text{ کا حل ہے}$$

$$۱ + ۱ = ۲ \text{ جب } (۱ + ۱) = ۲ \text{ جب } ۱ + ۱ = ۲$$

۵۔ مستقل سروں والی دوسرے رتبہ کی خطی مساواتیں۔

$$\frac{f^2}{w} + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۱ + ۱ + ۱ \dots \dots \dots (۲)$$

کی صورت کی مساواتیں (جس میں پ اور ق مستقل ہیں) اطلاقی ریاضی میں

اہمیت رکھتی ہیں۔

(۱) کا کوئی خاص حل حاصل کرنے کے لیے $x = 0$ (۱)
فرض کر کے مستقل رکھی ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کی جاتی ہے
جو مساوات (۱) کے لیے درست ہو۔

(۱) کو تفریق کرنے سے $\frac{x}{2} = 0$ (۲)
 $\frac{x}{2} = 0$ (۲)

اب (۱) اور (۲) سے مساوات (۱) میں تعویض کرنے اور جزوی ضربی کر کے تقسیم کر ڈالنے سے

نتیجہ $x + y + z = 0$ (۳)
برآمد ہوتا ہے جو ایک دوسری مساوات ہے جس کی اصلیں x کی مطلوبہ
قیمتیں ہیں۔

مساوات (۳) کو (۱) کی امدادی مساوات کہتے ہیں۔ اگر (۳) کی اصلیں
سم اور یہ ہیں تو

$x = 0$ اور $y = 0$ (۴)

تفریق مساوات (۱) کے ملحدہ ملحدہ خاص حل ہیں اور اس کا پورا حل ہے

$x = 0$ (۵)

(۵) میں فی الواقع دو اختیاری مستقل ہیں اور یہ رابطہ (۱) کے لیے صادق آتا ہے۔

توضیحی مثال۔ $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کا معادین حل $x + y = 0$ ہے
اس کو حل کرنے سے اس کی اصلیں ۲ اور ۳ برآمد ہوتی ہیں۔ اور
(۱) کی مساوات (۵) سے دی ہوئی مساوات کا پورا حل

$x = 0$ ہے جواب

[آزما کر دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ دی ہوئی مساوات میں ما کی یہ قیمت درج کرنے سے اس کی تصدیق ہو جاتی ہے۔]

اگر اعدادی مساوات کی اصلیں خیالی ہوں تو (۵) کے

وقت نما (exponents) بھی خیالی ہو گئے۔ لیکن (۵) میں ج اور ج کے لیے مناسب خیالی قیمتیں منتخب کرنے سے ایک حقیقی پورا حل دریافت ہو سکتا ہے۔

چنانچہ فرض کرو $1 = 1 + 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (1)$
 مساوات (۳) کی دو مزدوج خیالی اصلیں ہیں۔ تب
 $1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (2)$
 $1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (3)$
 $1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (4)$

ان قیمتوں کو (۵) میں تعویض کرنے سے

$1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (5)$
 لیکن $1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (6)$
 جم ب لا + ۱ - ۱ جب ب لا اور تو
 جم ب لا - ۱ - ۱ جب ب لا =

[لاحظہ ہو نصاب ریاضی حصہ اول باب ۱۴ صفحہ ۲۸۲]

جب یہ قیمتیں (۸) میں تعویض کی جاتی ہیں تو پورا حل لکھا جاسکتا ہے۔

$1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (7)$

اگر نئے اختیاری مستقل + ادب کی سابقہ ج اور ج سے بذریعہ
 $1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = 1 - 1 - 1 \dots (8)$
 تعیین کی جاتی ہے۔
 بالفاظ دیگر اب (۵) میں سمجھائے ج اور ج خیالی قیمتیں ج = ۱ - ۱ - ۱
 ج = ۱ - ۱ - ۱ (۱ + ۱ - ۱) لی جاتی ہیں۔

۱ اور ب کو (۹) میں باری باری سے قیمتیں ایک اور صفر اور صفر اور ایک دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

۱۰ = مولد جم بلا اور ۱۱ = مولد جب بلا (۱۰)

(ز) کے حقیقی خاص مل ہیں۔

توضیحی مثال - حل کرو $\frac{فر۱}{فر۲} + ک۱ = .$

حل۔ یہاں امدادی مساوات ہے $z = k + z$ ہے۔

پس $r = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$

(۶) سے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ $1 = ۰$ باب = ک پس (۹) سے پورا مل
 $۱ = ۱$ جمع ک لا + ب جب ک لا ہے۔

ما = ۱ جم رک لا + پ جب ک لا ہے۔

[نوٹ۔ ایسی ہی مساوات کوٹے میں بصورت (و) ایک دوسرے طریقہ

سے مل کیا گیا۔ دونوں طریقوں کا مقابلہ کیا جائے۔

اگر معاون مساوات کی اہلیں حضتی اور مساوی ہوں تو ایسی صورت میں
پا = سم ق اور

پا = ساق اور

مسوات (۳) ہوجاتی ہے $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \dots = (11)$

اور م = م = - ۱/۲ پ اس صورت میں

(۱۲) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ اور $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

عقلمند و علیمند خاص مل ہیں۔ پس پورا مل ہے:

$$(13) \dots\dots\dots (u, v) = 1$$

انہیں بیان کی تائید میں صرف اثباتیت کو دینا ضروری ہے کہ (۱۲) کی دوسری مساوات دی ہوئی تفریق مساوات کے لیے ایک حل مہیا کر دیتی ہے۔ لیکن عمل تفرق سے

عمل تفرق سے

۱ = لا قو^{۱۰} = $\frac{فر۱}{فر۱۰}$ = قو^{۱۰} (۱ + ر لا) = $\frac{فر۱}{فر۱۰}$ = قو^{۱۰} (۲ + ر لا) (۱۴)
ان قیمتوں کو (ز) کے اندر تعویض کرنے اور قو^{۱۰} پر تقسیم کر ڈالنے سے نتیجہ
ذیل حاصل ہوتا ہے:

(۱۵) پ + پ + پ + لا + پ + پ + پ
جو صفر کے مساوی ہے اس لیے کہ ر رابطہ (۳) کی تصدیق کرتا ہے اور
= - $\frac{۱}{۲}$ پ

توضیحی مثال - حل کرو $\frac{فر۱}{فر۱۰} + ۲ + \frac{فر۱}{فر۱۰} = ۱۴$
یہاں مساوی مساوات ہے $۲ + ۴ + ۲ = ۱۴$ یعنی (۲ + ر) = ۲
پس دونوں اصلیں مساوی ہیں اور ر = ۲ -
اور (۱۳) کے رو سے مساوات کا پورا حل ہے

$$۱ = قو^{۱۰} (ج + ۲ ج لا)$$

[طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے کہ ثابت کرے کہ مساوت
کا خاص حل دراصل اس کے ۱ = ۶ اور $\frac{فر۱}{فر۱۰} = ۴ -$ جبکہ لا = ۰
۱ = قو^{۱۰} (۶ + لا) ہے]
[نوٹ - (ز) کی صورت کی مساواتوں کے حل میں بڑی سہولت پیدا
ہو جاتی ہے اگر ان کو

$$= ۱ (ق + ع + پ)$$

لکھا جائے جس میں ع = $(\frac{فر۱}{فر۱۰})$ مال تفریق operator کہلاتا ہے
۱ کے ساتھ اس کے استعمال کا وہی مفہوم ہے جو ع + ۱ + پ ع + ۱ + ق + ۱
کے لیے اس طرح کہنے سے معلوم ہو گا کہ مساوات (ع + پ ع + ق) = ۱

مث کی مساوات (۳) یعنی $را + پ + ق =$ کے بہت مشابہ ہے۔
جب یہ طریقہ کتابت استعمال کر کے جبری مساوات $عف + پ + ق =$ مل کی جاتی ہے تو $عف$ کے لیے درمی قیمتیں دستیاب ہوتی ہیں جو $ر$ کے لیے ہوتی ہیں

مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کا پڑا مل معلوم کرو:—

$$(۱) \quad \frac{۱۲}{۱۱} - \frac{۱۲}{۱۱} = ۱۲ = [جواب] ۱ = ج + ۱۲ + ج + ۱۲$$

$$(۲) \quad \frac{۹}{۱۱} - \frac{۱۲}{۱۱} = ۱ = [جواب] ۱ = (۱ + ۱۲) + ۱۲$$

$$(۳) \quad \frac{۱۲}{۱۱} + ۱۲ = [جواب] ۱ = ج + ۱۲ + ج + ۱۲$$

$$(۴) \quad \frac{۱۲}{۱۱} + ۱۲ = [جواب] ۱ = ج + ۱۲ + ج + ۱۲$$

$$(۵) \quad \frac{۱۲}{۱۱} + ۱۲ = [جواب] ۱ = ج + ۱۲ + ج + ۱۲$$

$$(۶) \quad (عف + ۱۲ + ۱) = ۱ = [جواب] ۱ = (۱ + ۱۲) + ۱۲$$

$$(۷) \quad مساوات (عف + ۱۲ + ۱) = ۱ = [جواب] ۱ = (۱ + ۱۲) + ۱۲$$

$$عف = ۱ - ۱۲ = ۱۱ = [جواب] ۱ = ۱۱ + ۱۲$$

تفرقی مساوات $\frac{۱۲}{۱۱} + پ + ما + ق = لا$ (ح)

کامل جبکہ پ اور ق مستقل ہیں اور لا قیوع متغیر کا تفاعل ہے یا مستقل۔
اس کے لیے ہمیں عمل کرنے پڑتے ہیں۔

پہلا علی - مساوات (زا کو حل کرو۔ فرض کرو کہ اس کا پورا حل ہے

(17) $s = 1$

تو، کو مساوات (رح) کا متمم تفاعل کہتے ہیں۔
 دوسرا عمل - آزمائش کے طریقے سے مساوات (رح) کا کوئی خاص
 حل معلوم کرو

116, . . . , 9=1

تیسرا عمل۔ اب (ح) کا پورا مل ہے

(1A) $\dots\dots\dots 9 + 5 = 6$

امرواقی ہے کہ رابطہ (۱۸) سے جب ماکئی قیمت مساوات (ح) میں تقویض کی جاتی ہے تو مساوات کے لیے صادق آتی ہے اور (۱۸) میں دو لازمی اختیاری مستقل ہوتے ہیں۔ خاص مل (۱۶) معلوم کرنے کے لیے ذیل کی پڑائی منید پائی جائیگی۔ ان ضابطوں میں تمام حروف با تشنا و متبوع متغیر لا مستقل ہیں۔

عام صورت۔ اگر $a =$ مساوات (از) کا ایک خاص حل نہ ہو۔

اور (۱) لا بصورت $1 + 1 = 2$ فرض کرو $1 + 1 = 2$ اور $1 + 1 = 2$

۴ (۲) لا بصورت و صورتی هو تو فرض کرد $a = 0 = 1$ و $a = 0$

۴ (۳) بصورت $\frac{1}{2}$ حجم بلا + $\frac{1}{2}$ حجم بلا ہو تو فرض کرو $\frac{1}{2} = 1$ و

$$= \text{اجم} : \text{لا} + \text{اجب} : \text{لا}$$

خاص صورت۔ اگر $a = لا$ مساوات (ز) کا ایک خاص حل ہو تو

و کے لیے صورت بالا مضروب بہ لا (یعنی متبوع متغیر) فرض کرو۔

طریقہ یہ ہے کہ حسبِ ہدایات معروضہ بالا مساوات (ح) کے اندر $\alpha = 0$ و تعویض کی جائے اور مستقل مقادیر 'ا'، 'ب'، 'ج' حاصل کیے جائیں جو مساوات (ح) کے لیے صادق آتے ہیں۔

توضیحی مثال (۱) مل کرو $\frac{12}{17} + \frac{12}{17} - \frac{12}{17} = 12$

حل - پہلا عمل - $۱۶ = \frac{۱۶}{۱۱} + \frac{۱۶}{۱۱}$ کے ابتدائی میں $\frac{۱۶}{۱۱}$ فرما

کو پورا مل کر کے بتایا گیا ہے اس کے لحاظ سے دی ہوئی مساوات کا متم تغافل

$$۱ = ۱۶ = ۱۶ + ۱۶$$

دوسرا عمل - چونکہ $۱۶ = ۱۶$ مساوات $\frac{۱۶}{۱۱} + \frac{۱۶}{۱۱}$ فرما $۱۶ = ۱۶$ کا ایک خاص مل نہیں ہے اس لیے فرض کرو کہ اس کا ایک خاص مل ہے

$$۱ = ۱۶ + ۱۶$$

ماکی یہ قیمت دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے $۱۶ = ۱۶ + ۱۶$ اب لاکھ مشابہ قوتوں کے سوں کو مساوی گھسنے سے

$$۱۶ = ۱۶ + ۱۶$$

$$۱۶ = ۱۶ + ۱۶$$

$$۱۶ = ۱۶ + ۱۶$$

تبسلا عمل - ہذا پورا مل ہے

$$۱ = ۱۶ = ۱۶ + ۱۶$$

توضیحی مثال (۲) حل کرو $\frac{۱۶}{۱۱} + \frac{۱۶}{۱۱}$ فرما $۱۶ = ۱۶$

حل - پہلا عمل - اس مساوات کا متم تغافل ہے۔

$$۱ = ۱۶ = ۱۶ + ۱۶$$

حل - پہلے پورا حل معلوم کر لیا جائے۔

پہلا عمل - $\frac{2}{3}x + 4 = 0$ کو حل کرنے سے متم تفاعل

$$4 = 0 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4 \text{ دستیاب ہوتا ہے۔}$$

دوسرا عمل - دی ہوئی مساوات کے بائیں جانب پر غور کرنے سے

معلوم ہو جاتا ہے کہ $4 = 0 - 4$ جم 4 مساوات $\frac{2}{3}x + 4 = 0$ کا ایک

خاص حل ہے جبکہ مساوات $4 = 0$ اور $4 = 0$ کا خاص حل ہے۔

اس لیے دی ہوئی مساوات کے ایک خاص حل کے لیے فرض کر دو۔

$$4 = 0 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4$$

اس آخری مساوات کو تفریق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{2}{3}x = 0 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4$$

$$\text{اور } \frac{2}{3}x = 0 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4$$

$\frac{2}{3}x$ اور $\frac{2}{3}x$ کی ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کر کے سادہ بنانے

پر نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

$$4 = 0 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4$$

یہ مساوات ایک متماثلہ (identity) ہو جاتی ہے جبکہ $4 = 0$ اور $4 = 0$

$4 = 0$ و مالی مساوات میں تعویض کرنے سے $4 = 0$ جب 4

حاصل ہوتا ہے۔

نیکسل عمل - پس دی ہوئی مساوات کا پورا حل ہے

$$4 = 0 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4 - 4 \text{ جم } 4 \text{ جب } 4$$

اب ہمیں ج، اور ج کی قیمتیں معلوم کرنی ہیں در انحالیکہ

$$۰ = ۱ \text{ اور } \frac{۱}{۱۱} = ۲ \text{ جبکہ } ۱ = ۰$$

۱ کے پورے حل کی مساوات کو تفریق کرنے سے

$$\frac{۱}{۱۱} = ۲ - ۲ \text{ جب } ۱ = ۰ \text{ اور } ۲ = ۱ \text{ جب } ۰ = ۱$$

۱ اور $\frac{۱}{۱۱}$ کی مساواتوں میں مصرعہ بالا شرائط تعویض کرنے سے

$$۰ = ج، ۲ = ج، ۰ = ج، ۱ = ج$$

پس مطلوبہ خاص حل ہے $۱ = ج$ جب $۱ = ۰$ اور $۰ = ج$ جب $۰ = ۱$

مثالیں

ذیل کی تفریقی مساواتوں کے پورے حل معلوم کرو :-

$$(۱) \frac{۱}{۱۱} = ۲ - \frac{۱}{۱۱} + ۱۳ = ۳۹$$

[جواب: $۱ = ج$ جب $۱ = ۰$ اور $۰ = ج$ جب $۰ = ۱$]

$$(۲) \frac{۱}{۱۱} = ۲ - \frac{۱}{۱۱} + ۱۳ = ۳۹$$

[جواب: $۱ = ج$ جب $۱ = ۰$ اور $۰ = ج$ جب $۰ = ۱$]

$$(۳) \frac{۱}{۱۱} = ۲ - \frac{۱}{۱۱} + ۱۳ = ۳۹$$

[جواب: $۱ = ج$ جب $۱ = ۰$ اور $۰ = ج$ جب $۰ = ۱$]

$$(۴) \frac{۱}{۱۱} = ۲ - \frac{۱}{۱۱} + ۱۳ = ۳۹$$

[جواب: $۱ = ج$ جب $۱ = ۰$ اور $۰ = ج$ جب $۰ = ۱$]

$$(۵) \frac{۱}{۱۱} = ۲ - \frac{۱}{۱۱} + ۱۳ = ۳۹$$

[جواب: $۱ = ج$ جب $۱ = ۰$ اور $۰ = ج$ جب $۰ = ۱$]

ذیل کی مثالوں میں خاص حل دریافت کرو جو دی ہوئی شرائط کو پورا کرتا ہے۔

$$(۶) \frac{فرز۱}{فرز۱} - \frac{فرز۱}{فرز۱} = ۳ - \frac{فرز۱}{فرز۱} = ۶'۱ = ۱ \frac{فرز۱}{فرز۱} = ۱ \text{ جبکہ } ۰ =$$

[جواب: ۱ = ۶'۱ = ۱۲]

$$(۷) \frac{فرز۱}{فرز۱} - \frac{فرز۱}{فرز۱} = ۵ - \frac{فرز۱}{فرز۱} = ۱۶ = ۲'۱ = ۱ \frac{فرز۱}{فرز۱} = ۱'۱ \text{ جبکہ } ۰ =$$

[جواب: ۱ = ۱۶]

۹۔ میکانیات کے بعض مسائل میں تفسیرتی مساواتوں کا استعمال۔

مثال (۱) ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے اس کا اسراع

ایک مقررہ مقام سے اس کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔
(۱) اس کی رفتار اور طے شدہ فاصلہ (ب) وقت اور طے شدہ فاصلہ کے مابین رابطے دریافت کرو۔

حل (۱) فاصلہ کو 'س' رفتار کو 'ر' اسراع کو 'ا' اور وقت کو 'ت' تعبیر کرو۔

$$تب \text{ } ر = \frac{فرس}{فرز۱} = ۱ = \frac{فرس}{فرز۱} = \frac{فرز۱}{فرز۱} = \frac{فرز۱}{فرز۱} = \frac{فرز۱}{فرز۱} = \frac{فرز۱}{فرز۱}$$

مفروضہ کے لحاظ سے ۱ = - ک جس میں ک ایک مستقل ہے۔ تب ر فرس = ک

$$پس ک ر فرس = - ک \frac{فرس}{فرز۱} \therefore \frac{۱}{ر} = ک [\frac{۱}{فرس} - \frac{۱}{فرس}]$$

$$س = \frac{ک (فرس - فرس)}{فرس}$$

اور

مثال (۲) ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے لیکن اسراع میں اس کی رفتار کے تناسب گھٹاؤ واقع ہوتا ہے۔
[کھریا اپنی کے مہین قطرے غیر متحرک ہوائی فضاء میں اسی طرح حرکت کرتے ہیں]

حل۔ (۱) رفتار اور وقت میں تعلق۔ س، ر اور ل کو ایک ہی سمت میں ثبت مانو اور فرض کرو کہ اسراع میں گھٹاؤ اس طرح سے واقع ہوتا ہے کہ رفتار جب ر م ہوتی ہے تو مخالف اسراع ل کے برابر ہو جاتی ہے۔ پس اس حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{فر}{ر} = ر \frac{فر}{ر} = ۱ - \frac{ل}{ر م} = \frac{ل}{ر م} (ر - ر)$$

فرض کرو کہ ذرہ مبدا پر حالت سکون میں ہے اور اس پر اسراع ل و غایہ کیا جاتا ہے جبکہ و = ۰۔
تب متغیروں کو جدا کر کے تکمیل کرنے سے

$$\frac{ل}{ر م} = \frac{فر}{ر} = ۱ - \frac{ل}{ر م}$$

$$پس \frac{ل}{ر م} = ۱ - \frac{ل}{ر م} \text{ یعنی } ۱ = \frac{ل}{ر م} + \frac{ل}{ر م} = \frac{۲ل}{ر م}$$

$$یا \frac{ل}{ر م} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{جس سے حاصل ہوتا ہے } ر = ل م (۱ - \frac{ل}{ر م})$$

(ب) رفتار اور فاصلہ میں تعلق۔

$$\text{چونکہ } \frac{فر}{ر} = \frac{فر}{ر} = \frac{فر}{ر} = ر \frac{فر}{ر}$$

اس لیے (۱) کی ابتدائی مساوات حرکت ہو جاتی ہے

$$r \frac{f}{f_{\text{میں}} - 1} = \frac{1}{r - 1}$$

اب متغیروں کو جدا کر کے تحلیل کرنے سے

$$\frac{1}{r} \log r = -\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{-r} = \frac{1}{r}$$

پس $\frac{1}{r} = r - r + r = r - \frac{r}{r} = \frac{r-r}{r}$

۱۔ ن۔ ویں رتبہ کی مستقل سرون والی
خطی تفرقی مساواتیں۔

تفرقی مساوات $\frac{فرق۱}{فرق۱ک} + \frac{فرق۲}{فرق۲ک} + \frac{فرق۳}{فرق۳ک}$

..... (ط) +.....

(جس میں ک، ک، ک مستقل ہیں) کے مل کے لیے اگر مساوات کے سیدھے جانب کے رکن میں ا کے بجائے و ملا تعویض کیا جائے تو

($r_n + k, r_{n-1} + k, r_{n-2} + k, \dots, k$) کو r_n حاصل ہوتا ہے۔ اور یہ جملہ

رکھی تمام قیمتوں کے لیے جو مساوات

$$(1) \dots = k + {}^{(1)}k + {}^{(2)}k + \dots$$

کی تصدیق کرتی ہیں منعدم ہو جاتا ہے۔

پس رکی ان تمام قیمتوں کے لیے قوت مساوات (ط) کا ایک حل ہے۔ مساوات (۱) مساوات (ط) کی امدادی کہلاتی ہے۔ واضح ہو کہ دونوں مساوات کے سر ایک ہی ہیں۔ (۱) کے قوت نما (ط) کے مشتقات کے رجحان کے

متناظر ہیں اور ماکہ بجائے ۱ درج ہے۔ (۱) کی اصلوں سے ہم مساوات (ط) کے خاص حل لکھ سکتے ہیں۔ اور یہ نتائج بعینہً مساوات کے نتائج ہیں جبکہ مساوات کا رتبہ دو سے متجاوز ہے۔ ان کا ثبوت اس نصاب سے بالاتر نصاب کی کتابوں میں مل سکتا ہے۔

تفرقی مساوات (ط) کے حل کا قاعدہ۔

پہلا عمل۔ متناظر اعدادی مساوات

$$r_k + k^r + k^{r-1} + \dots + k^1 + k^0 = \dots + k^1 + k^0 \dots \dots \dots (1)$$
 لکھ دی جائے۔

دوسرا عمل۔ اعدادی مساوات کو پورا حل کیا جائے
 تیسرا عمل۔ اعدادی مساوات کی اصلوں سے تفرقی مساوات کے متناظر خاص حل (بوجوب اشارات ذیل) لکھ لیا جائے۔

اعدادی مساوات کی	تفرقی مساوات کا
(۱) ہر علامہ اصل ۱ سے حاصل ہوتا ہے	ایک خاص حل ۱
(ب) ہر علامہ خیالی اصلوں کے جفت ۱ سے حاصل ہوتے ہیں	دو خاص حل ۱ و ۱
(ج) ایک ضمنی اصل ۱ سے جو اس رتبہ ۱ سے حاصل ہوتے ہیں	۱ (۱) یا (ب) خاص حل کو
واقع ہوتی ہے	۱ (۱) لا لا لا لا ۱ سے ضرب دیگر

چوتھا عمل۔ اس طرح حاصل شدہ ن آزاد حلوں میں سے ہر ایک حل کو ایک اختیاری مستقل سے ضرب دے کر نتائج جمع کر لیے جائیں۔ اس نتیجہ کو ماکہ مساوی لکھنے سے مساوات کا پورا حل دستیاب ہوتا ہے

[نوٹ۔ صحت عمل کا ایک امتحان یہ ہے کہ پہلے تین حلوں سے ن آزاد

حل حاصل ہونے چاہئیں۔

توضیحی مثال (۱) حل کرو $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{x^2}{x^2-12} + 12$

حل۔ معرکہ بالا قاعدہ کی رو سے

پہلا عمل۔ مساوات ہے $x^2 - 4 - x^2 - 9 = 12 + x^2$

یعنی $0 = (x-2)(x+2)(x-3)$

دوسرا عمل۔ اس کی اصلیں ہیں $x = 2, -2, 3$

تیسرا عمل۔ (ج) دہری اصل ۲ سے حاصل ہوتے ہیں $x = 2, -2$

(د) اصل ۳ سے حاصل ہوتا ہے $x = 3$

چوتھا عمل۔ پس پورا حل ہے $x = 2, -2, 3$ جواب

توضیحی مثال (۲) حل کرو $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x^2}{x^2-9} = \frac{x^2}{x^2-12} + 12$

$= \frac{x^2}{x^2-12} + 12$

حل۔ مساوات ہے $x^2 - 4 - x^2 - 9 = 12 + x^2$

یعنی $0 = (x-2)(x+2)(x-3)$

جس کی اصلیں ہیں $x = 2, -2, 3$

پس پورا حل ہے

$x = 2, -2, 3$ جواب

مسائل

ذیل کی تفرقی مساواتوں کے پورے حل دریافت کرو :-

(۳) کی دریافت میں $n = 2$ کے لیے مساوات (ح) سے متعلق آزمائش کے جو طریقے بتائے گئے ہیں یہاں n کی کسی قیمت کے لیے بھی استعمال کیے جاسکتے ہیں۔

کسی حالت میں بھی (ی) کا کوئی خاص معلوم کرنے کے لیے ذیل کے قاعدہ پر عمل کیا جاسکتا ہے۔

پہلا اعلیٰ - دی ہوئی مساوات (ی) کو متواتر تفرق کرو اور یا براہ راست یا اسقاط کے ذریعہ (ط) کی صورت کی بلند ترین رتبہ والی مساوات حاصل کرو۔

دوسرا اعلیٰ - اس نئی مساوات کو قاعدہ مندرجہ صفحہ () سے مل کر کے اس کا پورا حل

$$u + v = 6$$

حاصل کرو۔ جس میں جزو v مساوات (ی) کا پہلے حل سے قبل از میں دریافت شدہ تمام تفاعل ہے اور مزید دریافت شدہ رتبوں کا حامل جمع ہے۔

[طریقہ عمل سے واضح ہے کہ ابتدائی مساوات کا ہر ایک حل مشتق مساوات کا بھی حل ہونا چاہئے]

تیسرا اعلیٰ - خاص حل u میں تکمیل کے مستعملوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات (ی) میں

$$u = 6$$

اور اس کے مشتقات تعویض کرو۔ بطور نتیجہ جو متماثل صورت پذیر ہو اس میں مثلاً رتبوں کے سروں کو مساوی لکھو۔ ان مساواتوں کو حل کر کے تکمیل کے مستعملوں کو معلوم کرو اور ان کی قیمتوں کو

$$u + v = 6$$

میں تعویض کر دو۔ اب مساوات (ی) کا پورا حل دستیاب ہو جائیگا۔

توضیحی مثال - تفرقی مساوات

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} = 2 + \frac{1}{x^5} \quad (1) \text{ کو حل کرو۔}$$

جہ کی موزوں قیمت کے لئے مساوات (۱) کا ایک خاص حل ہوگا۔

(۹) کو تفریق کرنے سے $\frac{فر۱}{فر۱} = ج۱ مو + ج لا مو$
 { $\frac{فر۲}{فر۲} = ج۲ مو + ج لا مو$
 (۱۰) { $\frac{فر۳}{فر۳} = ج۳ مو + ج لا مو$

مسادات (۱) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے اور ٹولہ پر تقسیم کرنے سے نتیجہ حاصل ہوتا ہے

۲۔ ج = ۱
لاکی مشابہ قوتوں کے سروں کو باہر دیگر مساوی کھینے سے ج = - ۱/۴
اس قیمت کو (۹) میں تعویض کرنے سے م = و = - ۱/۴ لاؤ
دی ہوئی مساوات کا پورا حل ہے م = و = ج = و
ج + ج + ج = ۱/۴ لاؤ جواب

مشائیں

مندرجہ ذیل تفرقی مساواتوں کے پورے حل معلوم کرو:-

$$ur = 1r + \frac{r}{u}r + \frac{r}{u^2}r \quad (1)$$

$$r + \frac{r}{2} + \frac{r}{4} + \frac{r}{8} + \dots = 13 - \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(3) \quad \frac{f(r)}{r^2} = \frac{f(r)}{r^2} + \frac{f(r)}{r^2} - \frac{f(r)}{r^2}$$

فہرست اصطلاحات

نصاب ذیلی ریاضی

حصہ دوم

انگریزی

انگریزی | اردو

A

Co-axial

Approximation

تقریب

Coefficient

Arbitrary constant

اختیاری قس

Complex

Arithmetic mean

اوسط حسابی

Conic

Asymptote

مقابل

Conjugate

Auxiliary

equation

} امدادی مساوات

Cubic

Curve

Axis

محور

Cusp

B

Cycloid

Binomial Theorem

مثنوی

D

C

Denominator

Cardioid

خط صوبی

Determinant

Catenary

زنجیو

Dimensions

Cissoid

ہلالی

Director circle

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Directrix	مرتب	Hyperbola	زائد
Double integral	دوہرہ انضمام	Hyperbolic function	زائدی تعامل
E		Hypocycloid	برتدویر
Eccentricity	خرج مرکز	I	
Eliminant	حاصل استقا	Imaginary	خیالی
Elimination	استقا	Indefinite integral	غیر محدود انضمام
Ellipse	ناقص	Indeterminate form	غیر متعین شکل
Ellipsoid	ناقص نما	Index	قوت نما
Envelope	نفا	Inertia, moment of	معیار جہود
Evolute	بر پیچہ	Infinitesimal	صغاری
Expansion	پھیلاؤ	Infinity	لامتناہی
Exponential theorem	مسئلہ قوت نما	Inflexion, points of	نقاط انکنا
F		Integral	انضمام
Factorial	ضربی	Integrand	شکل
Focus	اسک	Integration, constant of	انضمام کا مستقل
Frustrum	مقطع	Integrating factor	شکل جزو ضربی
G		Intercept	مقطعہ
General equation	عام مساوات	Interpolation	بینی ادراج
Geometric mean	اوسط ہندسی	Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Gyration, radius of	گردشی نصف قطر	Inverse function	مقلوب تعامل
H		Involute	در پیچہ
Harmonic mean	اوسط موسیقی	L	
Homogeneous equation	ہمزاد مساوات		

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Latus rectum	وترخاص	Orthogonal	قائم مریات
Lemniscate	دویشی (منحنی)	trajectories	
Limit	انتہا	Osculating circle	لمشی دائرہ
Locus	طریق	P	
Logarithmic	لوگارتھی تفریق	Parabola	مکافی
differentiation		Paraboloid	مکافی نما
Logarithmic	لوگارتھی تعامل	Parameter	مبدل
function		Partial	جزوی تفریق
Logarithmic series	لوگارتھی سلسلہ	differentiation	
M		Partial fractions	جزوی کسور
Major axis	محور اعظم	Polar Co-ordinate	قطبی محدود
Mean value	اوسط قیمت	R	
Mean value,	اوسط قیمت کا مسئلہ	Radius of	نصف قطر انحناء
Theorem of		curvature	
Minor axis	محور اصغر	Radius vector	سمتی نیم قطر
Modulus	مقیاس	Rational	منطوق
N		Rectangular	قائم زائد
Normal	عماد	hyperbola	
Numerator	شمار کنندہ	Reduction formula	تحویلی ضابطہ
Numerical	عددی	S	
O		Semi-cubical	نیم کعبی مکافی
Odd	طاق	parabola	
Order	رتبہ	Singular points	آدم نقطے
Origin	مبدأ	Spiral	مروغولہ

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Subnormal	زیر عماد	Unknown	نامعلوم
Subtangent	زیر مماس	V	
T		Vector	سمتی
Tangent	مماس	Value	قیمت
Total differential	کلی تفرق	W	
Trajectories	خطوط طرعی	Whole number	صحیح عدد
U		Witch	} اگنسی کی ڈائن
Unity	ایکائی	of Agnesi	

اغلاطانا

نصاب فی ریاضی حصہ ثانی دوم

صحیح	غلط	پہا	پہا	صحیح	غلط	پہا	پہا
میں اس	میں اس	۱۸	۱۳۶	و	و	۱۳	۵
و امر قضا	و امر قضا	۴	۲۰۰	غیر حل	غیر حل	۹	۳۰
ذیل جلیں کو	ذیل کو	۱۰	۰	لوک و لا	لوک و لا	۸	۳۲
= کر ۶ لا	= کر ۶ لا	۱۲	۰	جب	جب	۱۰	۴۱
$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۱۶	۲۱۲	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۱۴	۵۳
تکرر	تکرر	۵	۲۵۰	$\frac{۱۲}{۳}$	$\frac{۱۲}{۳}$	۱۰	۶۹
$(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴})$	$(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴})$	۶	۲۶۲	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	۱۸	۶۳
مستقیم	مستقیم	۱۳	۰	$\frac{۱۳}{۳}$	$\frac{۱۳}{۳}$	۶	۱۳
$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۹	۲۶۵	۰	۰	۱۲	۱۳۶
$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۲}{۴}$	۱۲	۲۶۹				

صحيح	غلط	صحيح	غلط	صحيح	غلط	
جف ي	جف ي	۹	۳۹۷	(ط + ط) (ط + ط)	۷	۳۰۹
جف لا	جف لا	۵	۳۱۰	غ $\frac{(ط + ط)(ط + ط)}{(ط - ط)(ط + ط)}$	۲	۳۱۷
کے	ے	۱۹	۳۱۱	مر $\frac{(ط + ط)(ط + ط)}{(ط - ط)(ط + ط)}$	۲	۳۲۹
بمحاط	بمحاط	شکل	۳۲۲	Sector	۱۹	۳۳۶
(لا، ما)	(لا، ما)	۱۱	۳۲۳	$\frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط}$	۶	۳۴۳
(لا - ما)	(لا - ما)	شکل	۳۲۴	$\frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط}$	۱۳	۳۷۶
ف، ف، ع	ف، ف، ع	۹	۳۳۹	$\frac{ط}{ط} - \frac{ط}{ط}$	۱۴	۳۷۶
$\frac{ط}{ط}$	$\frac{ط}{ط}$	۲	۳۶۵	$\frac{ط}{ط}$	۱۵	۳۷۶
فرما	فرما	۶	۳۸۳	$\frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط}$		
فرلا	فرلا			$\frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط}$		
ک	ک					

سینکھانہ جامعہ ملیہ اسلامیہ
جامعہ نگر (دہلی)

